اندازه‌گیری و مدیریت ریسک بازار

رویکرد ارزش درمعرض‌ریسک

ترجمه و تألیف:

میثم رادپور–حسین عبده تبریزی

رادپور/ میثم
اندازه‌گیری و مدیریت ریسک بازار/ میثم رادپور، حسین عبده تبریزی.-تهران: انتشارات
(۱۳۸۸).
حروف‌نگاری، آماده‌سازی و نظارت بر دفتر چاپ

این کتاب تقدیم است به:

پدر عزیزم **هیبت‌الله رادپور**

و

مادر فداکارم **معصومه پارسای**

میثم رادپور

دیباچه

این کتاب به اندازه‌گیری و مدیریت ریسک بازار می‌پردازد. مؤلفان با تکیه بر دانسته‌ها و تجربیات خود و با جستجوی مراجع و مآخذ مختلف، مطالب مفصلی را به‌منظور تشریح موضوع یادشده گردآوری کرده‌اند. این جستجو طیف وسیعی از متون فارسی و انگلیسی و حتی پایان‌نامه‌های فارغ‌التحصیلان ایرانی را شامل می‌شود. آن‌چه در یازده فصل کتاب گرد آمده است، با توجه به نیازهای خوانندهٔ فارسی‌زبان است. هدف فقط دستیابی به مخاطبان دانشجو و دانش‌پژوهان نبوده است؛ مطالب این کتاب به‌گونه‌ای طرح‌ریزی شده که مدیران نیز مخاطب ما هستند؛ مدیرانی که به‌طور دائمی در کشوری در حال توسعه دست به گریبان ریسک اند و نیاز دارند که ریسک فعالیت خود را به اطلاعات کمّی بدل کنند و در پی کنترل و کاهش ریسک عملیات خود باشند.

به‌علت پیچیدگی مسألهٔ کمّی‌سازی ریسک، کتاب حاضر شامل طیف وسیعی از روابط و معادلات ریاضی، توابع آماری، مدل‌های اقتصادسنجی و نیز مدل‌های مطرح در زمینهٔ دانش اقتصاد و مالی است. یکی از اهداف خاص مؤلفان در تدوین این کتاب آماده‌سازی دانشجویان و دانش‌پژوهان برای خواندن و درک مقالات مجله‌های معتبر داخلی و بین‌المللی در رشته‌های مدیریت مالی، اقتصاد و سایر رشته‌های مرتبط است. چنین مقالاتی عمدتاً شامل روابط و مدل‌های نسبتاً پیچیده است و درک مطالب آن‌ها بدون فراگیری پیش‌زمینه‌های لازم، طاقت‌فرسا به‌نظر می‌رسد. کتاب حاضر با معرفی مدل‌های متنوع و رایج در زمینهٔ ریسک‌های مالی و با پرداختن به فنون پیشرفتهٔ آماری و استفادهٔ گسترده از روابط ریاضی دانش‌پژوهان را برای درک جنبه‌های فنی چنین مقالاتی مجهز می‌کند. هم‌چنین این کتاب با پرداختن به مسائل و موضوعات مختلف کمّی‌سازی ریسک می‌تواند

راهنمای خوبی برای طرح عناوین مقالات و پایان‌نامه‌های دانشجویان در رشته‌های مرتبط باشد.

مؤلفان کتاب به مدد بهره‌گیری از تجارب و دانسته‌های خود در زمینهٔ اندازه‌گیری انواع ریسک‌های مالی، دیدگاه جامع خود را در گوشه و کنار این کتاب عرضه داشته‌اند. مباحث این کتاب حتی‌الامکان به‌گونه‌ای مطرح شده که علاوه بر ریسک بازار به سایر ریسک‌ها نیز قابل‌تعمیم است. مبانی کمّی‌سازی و مدیریت ریسک‌های اعتباری، نقدینگی، عملیاتی و ... بر اساس ریسک بازار است و بنابراین، این کتاب می‌تواند به‌عنوان مرجعی عمومی برای مطالعهٔ ریسک موردملاحظه قرار گیرد.

بیشتر مباحث مطرح‌شده در این کتاب به‌طرز گسترده‌ای تشریح شده و تا حد توان از آوردن مطالب مبهم و غیرقابل فهم جلوگیری شده است. دلایل توسعهٔ مدل‌ها، پیش‌فرض‌ها و شرایط استفاده از آن‌ها، نحوهٔ تخمین پارامترها و مزایا و محدودیت‌های کاربرد مدل‌ها با دقت وصف‌ناپذیری ارایه شده است. اغلب مدل‌های کمّی همراه با مثال‌هایی است که نحوهٔ استفاده از آن‌ها را نشان می‌دهد. هم‌چنین، مؤلفان برای افزایش قابلیت درک مباحث یادشده، جداول و نمودارهای متعددی ارایه کرده‌اند که بسیاری از آن‌ها بر پایهٔ داده‌های بورس اوراق بهادار تهران است.

به رغم این‌که بخش عمدهٔ مطالب کتاب نگاشتهٔ مؤلفان است، اما حجم استفاده از متون انگلیسی مرجع و انعکاس ترجمهٔ آن‌ها در کتاب به‌قدری بوده است که شایسته دانستیم از عنوان «تألیف و ترجمه» استفاده کنیم.

مسؤولیت میثم رادپور عمدتاً متوجه نگاشتن بخش‌های کمّی کتاب بوده است. اوست که می‌باید از صحت مطالب کمّی و فرمول‌ها اطمینان یافته باشد. مسؤولیت حسین عبده تبریزی بیشتر متوجه صحت مفاهیم، انتخاب معادل‌ها، روانی مطالب، پیوند و توالی مطالب هر فصل و پیوستگی مباحث فصل‌های مختلف و نگارش جمع‌بندی‌ها بوده است. به رغم این تقسیم کار، بدیهی است که هر دو مؤلف در قبال صحت آن‌چه به روی کاغذ آمده، به اتفاق مسؤول اند.

درخواست مؤلفان/مترجمان از خوانندگان نقد کتاب و ارایهٔ راهنمایی به آنان است. عاجزانه تقاضا می‌کنیم که اشتباهات کتاب را به ما گوشزد بفرمایید تا اگر به چاپ‌های بعدی رسید آن موارد را با ذکر نام شما اصلاح نماییم.

در نهایت از تمام کسانی که ما را در تهیهٔ این کتاب یاری داده‌اند، خصوصاً آقای علی رسولی‌زاده‌ای، مهندس احسان رفیعی، مهندس حامد لهراسبی و آقایان ابوالفضل داوودآبادی، پدرام جهانگیری و امیر اشقاب تشکر می‌کنیم.

میثم رادپور، حسین عبده تبریزی

فهرست مطالب

فصل اول: کلیات ریسک

فصل دوم: ارزش درمعرض‌ریسک

فصل سوم: سنجه‌های منسجم ریسک

فصل چهارم: مدل‌سازی ریسک

فصل پنجم: رویکردهای پارامتریک

فصل ششم: نظریهٔ ارزش فرین

فصل هفتم: رویکردهای ناپارامتریک

فصل هشتم: رویکردهای نیمه‌پارامتریک

فصل نهم: شبیه‌سازی مونت‌کارلو

فصل دهم: تجزیهٔ ریسک

فصل یازدهم: پس‌آزمایی ارزش درمعرض‌ریسک

فصل اول

کلیات ریسک

مقدمه

سرمایه‌گذاران به‌هنگام اخذ تصمیمات سرمایه‌گذاری به‌طور هم‌زمـان ریسـک و بـازدهٔ حاصل از گزینه‌های مختلف را مد نظر قرار می‌دهند. ریسک و بازده اگر تنها ابعاد تأثیرگذار در زمینهٔ تصمیمات سرمایه‌گذاری نباشد، بدون شک مهمترین آن‌ها بـه شـمار مـی‌رود. در واقع آن‌چه که در دانش مالی از آن به‌عنوان رفتار عقلایی[1] تعبیر می‌شود، چیزی جز توجـه صرف به این دو بعد به‌هنگام تجزیه و تحلیل فرصت‌های سرمایه‌گذاری نیست. در ادبیـات مالی و اقتصادی به‌وضوح عنوان می‌شود، فرد عاقل کسی است که بـه‌دنبال دسـت‌یابی بـه سطح معینی از بازده با تحمل حداقل ریسک ممکن اسـت. بـه‌عبارتی دیگـر، وی خواسـتار دستیابی به حداکثر بازده در سطح معینی از ریسک است. بنابراین، ریسک جـزء جداشـدنی بازده است و نمی‌توان در مورد بازدهٔ سرمایه‌گذاری بدون توجه بـه ریسـک مترتـب بـر آن صحبت نمود. به بیانی دیگـر، ریسـک صـفت بـازده اسـت و نمی‌تـوان هـیچ موصـوفی را صرف‌نظر از صفتش تشریح کرد.

اگر ریسک و بازدهٔ دارایی با عنوان متغیر مد نظر قرار گیرد، تفاوت عمده‌ای بین آن‌هـا قابل‌تشخیص است. بازده متغیری کمّی و ریسک متغیری کیفی اسـت. بـدیهی اسـت کـه شناسایی، تجزیه و تحلیل و اندازه‌گیری متغیرهای کمّی بـه مراتـب سـاده‌تر از متغیرهـای کیفی است. اندازه‌گیری یک کیفیت و بیان آن در قالب یک کمّیـت کـاری بـس دشـوار و

---

1. rational behavior

مستلزم دقت و تلاشی وصف‌ناپذیر است. به‌همین دلیل است که هنوز هم تلاش جهت کمّی‌سازی ریسک و جستجو برای ارائهٔ مدل‌های دقیق‌تر و منطقی‌تر ادامه دارد.

پس از دستیابی به هدف کمّی‌سازی ریسک، هدف بعدی تعبیر و تفسیر کمیت‌ها در جهت کنترل و مدیریت ریسک است. تعبیر و تفسیر درست کمیت‌های ریسک، رهنمودهای مؤثری در جهت مدیریت بهینهٔ ریسک و اخذ تصمیات سازگار با اهداف و استراتژی‌های سازمان فراهم می‌آورد.

بنابراین، مسألهٔ اندازه‌گیری و مدیریت ریسک در هم تنیده شده است. به گفتهٔ یکی از صاحب‌نظران، تا اندازه‌گیری نکنیم، نمی‌توانیم مدیریت کنیم. تمرکز اصلی این کتاب نیز دقیقاً همین دو مسأله است. فصل اول را با کلیات ریسک آغاز می‌کنیم. این فصل در واقع مقدمه‌ای برای کل کتاب است.

مفهوم ریسک

هر یک از محققان از واژهٔ ریسک، تعریف خاص موردنظر خود را با اقامهٔ دلایل و مباحث گسترده مطرح کرده‌اند. البته، در علوم انسانی و به‌خصوص علوم مدیریت، این تنوع‌نظر عادی به‌نظر می‌رسد. با این وجود، می‌توان ادعا کرد در همهٔ این تعاریف، موقعیت‌های توأم با ریسک سه عامل مشترک دارد:

- عمل یا اقدام بیش از یک نتیجه به بار می‌آورد.
- تا زمان ملموس‌شدن نتایج، از حصول هیچ‌یک از آن‌ها آگاهی قطعی در دست نیست.
- حداقل یکی از نتایج ممکن‌الوقوع، پیامدهای نسبتاً نامطلوبی به‌همراه دارد.

پس، عدم‌اطمینان[1] از نتایج عمل و قرارگرفتن در معرض این عدم‌اطمینان از مهم‌ترین مؤلفه‌های تشکیل‌دهندهٔ انواع ریسک‌هاست. در برخی موارد، به‌طور کلی در مورد چگونگی نتایج آینده، اطلاعی در دست نداریم و در موارد دیگر با فرض آشنایی با گزینه‌های مختلف نتایج آتی، بر پایهٔ تجربه و حدس، تقریب‌هایی در مورد امکان وقوع هریک به‌دست می‌آوریم. در حالت‌هایی خاص نیز مشروط به حاضربودن پیش‌فرض‌هایی که آن حالت

1. uncertainty

خاص را ساخته است، می‌توان با استفاده از فنون آماری و قوانین احتمالات، با دقت نسبی، شناخت دقیق‌تری از احتمال وقوع این نتایج به‌دست آورد. بدیهی است با حرکت از سوی عدم‌اطمینان کامل نتایج به‌طرف عدم‌اطمینان نسبی آن‌ها، میزان ریسک نیز کمتر می‌شود. این واقعیت با ادراک متعارف ما نیز هم‌خوانی دارد، چراکه هرچه آینده برای ما روشن‌تر و عدم‌اطمینان‌های آن کمتر باشد، خود را در معرض ریسک و خطر کمتری می‌بینیم و برعکس.

تمام مؤسسات انتفاعی و غیرانتفاعی، از کارگاه‌های کوچک گرفته تا شرکت‌های بزرگ، به‌نوعی با ریسک روبرویند. هر جا برای یک انتخاب، گزینه‌های گوناگون وجود داشته باشد و آن گزینه‌ها با آثار و نتایج مختلف همراه باشد، ریسک وجود دارد. به‌خصوص، اگر حداقل یکی از این نتایج، اثرات نامطلوبی نسبت به سایر رویدادها داشته باشد.

برای مؤسسات مالی، ریسک از مفهوم وسیع‌تری برخوردارست. محور فعالیت‌های بسیاری از بنگاه‌های مالی مانند مؤسسات بیمه و صندوق‌های بازنشستگی بر کنترل ریسک استوار است. برای چنین مؤسساتی، این مفهوم به قدری مهم است که در بسیاری از موارد، حتی دخالت‌های مستقیم قانونی از سوی قانون‌گذاران را به همراه دارد. نمونهٔ بارز آن، تعیین حداقل میزان ذخیرهٔ قانونی بانک‌ها از سوی بانک مرکزی است که یکی از سه ابزار بسیار مهم برای کنترل سیستم بانکی است.

مدیریت ریسک[1]

هدف مدیریت ریسک کنترل پیامدهای نامطلوب ناشی از تحمل ریسک و هم‌چنین اطمینان‌یافتن از دستیابی به فواید پذیرش ریسک است. این امر مستلزم آن است که ریسک را شناسایی و برای مدیریت آن تصمیمات هوشیارانه اتخاذ کنیم. سهل‌انگاری در مدیریت ریسک، عواقب نامطلوب و مهمی به‌لحاظ مالی و اعتباری بر جای می‌گذارد. حتی اگر تأثیر پیامدهای عدم‌مدیریت ریسک جدّی هم نباشد، بی‌توجهی به آن می‌تواند باعث انحراف از مسیر اصلی امور شود و موجب شود تا به‌جای صرف وقت در مسائل اصلی تجارت، عمدهٔ انرژی و امکانات خود را صرف مقابله با تبعات عدم‌مدیریت ریسک نماییم.

1. risk management

توجه شایسته به مدیریت ریسک، نیازمند داشتن چارچوبی مطمئن برای آن است. این چارچوب نه‌تنها شامل فرآیندهای شناسایی، اندازه‌گیری و مدیریت ریسک می‌شود، بلکه سازوکاری فراهم می‌آورد که به ما امکان می‌دهد در رابطه با تغییرات ریسک در طول زمان، رویه‌های مدیریت بحران و طرح‌های محدودکنندهٔ عوامل مسبب ریسک که قبلاً پیش‌بینی نشده است، بازخور دریافت نماییم.

به بیانی دقیق‌تر می‌توان گفت مدیریت ریسک فرآیندی است که در آن مدیران به شناسایی، اندازه‌گیری و تصمیم‌گیری در مورد ریسک‌ها و نظارت بر انواع ریسک‌های مطرح برای بنگاه می‌پردازند. مثلاً، برای این‌که وضعیت مؤسسه در محدوده‌ای نگه داشته شود که پاسخگوی معیارهای نقدینگی موردنیاز یا موردنظر مشتریان، اعتباردهندگان[۱] و مقام ناظر[۲] باشد، مدیران ناچارند تخمین‌هایی از مقدار ضرر بالقوه ارایه کنند. در مرحلهٔ بعدی، باید سازوکارهایی برای کنترل مقدار ریسک برقرار کنند و هم‌چنین مشوق‌هایی برای ریسک‌پذیری عاقلانهٔ سرمایه‌گذاران عرضه نمایند.

مدیریت ریسک فرآیندی است برای رفع نیازهای یادشده از طریق:

- تعیین ریسک‌های عمده‌ای که مؤسسه در معرض آن‌ها قرار دارد.
- به‌دست‌آوردن معیارهای منسجم، قابل‌فهم و عملی برای تخمین ریسک‌ها.
- تصمیم‌گیری در مورد این‌که کدام‌یک از ریسک‌ها قابل‌تحمل است؛ کدام‌یک باید کاهش یابد؛ از کدام‌یک باید اجتناب شود و هم‌چنین تعیین ابزار مالی مورد نیاز.
- برقراری رویه‌های لازم جهت تعیین جایگاهی که مؤسسه از لحاظ ریسک[۳] باید به آن دست یابد.

طبعاً، با افزایش ریسک مؤسسات مالی، مدیریت ریسک مالی نیز اهمیت بیشتری می‌یابد. عدم‌ثبات سیاسی و اقتصادی در جهان کنونی و به‌دنبال آن ایجاد تغییرات سریع در محیط فعالیت شرکت‌ها، ریسک مؤسسات مالی را دو چندان کرده است. به‌علاوه، تجربه‌های تلخ بعضی کشورها مانند کشورهای آسیای جنوب شرقی در دههٔ قبل و به‌ویژه بروز بحران سال ۲۰۰۸ که نتیجهٔ مستقیم عدم‌مدیریت ریسک بوده، توجه بیشتر مدیران و

---

1. creditors
2. regulator
3. risk position

قانون‌گذاران را نسبت به مقولهٔ ریسک برانگیخته است. در حقیقت، بحران مالی سال ۲۰۰۸ و در پی آن بروز مشکلات گستردهٔ اقتصادی و اجتماعی و ورشکستگی‌های پی‌درپی و ناتوانی مؤسسات مالی در ایفای تعهدات خود باعث شده است که اکنون اندازه‌گیری و کنترل ریسک، در کانون توجه مؤسسات مالی قرار گیرد. این وقایع بر اهمیت روزافزون مدیریت ریسک دلالت دارد که از نتایج واضح آن، افزایش توجه مدیران به مطالعه در حوزهٔ ریسک است. بدیهی است انجام شایستهٔ هر یک از وظایف مدیریت ریسک، نیازمند استفاده از ابزار قدرت‌مند و مبتنی بر مبانی علمی است.

یکی از مهم‌ترین اجزای مدیریت ریسک، اندازه‌گیری ریسک[1] است. ریسک مفهومی کیفی است و به عدم‌اطمینان نسبت به انتظارات اشاره دارد. این عدم‌اطمینان، نگرانی‌هایی را نسبت به آینده برای سرمایه‌گذار ایجاد می‌نماید. تا زمانی که این عدم‌اطمینان کمّی نشود، قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی ریسکی به صورت معمّا باقی می‌ماند، چراکه ریسک موجود در دارایی‌های مالی از عوامل تعیین‌کنندهٔ نرخ بازدهٔ موردنظر سرمایه‌گذاران است و این نرخ در عین حال تعیین‌کنندهٔ قیمت دارایی‌های مالی است. اندازه‌گیری و کمّی‌کردن ریسک از دیرباز ذهن ریاضی‌دانان، مدیران و سیاست‌گذاران را به خود مشغول کرده است. سیاست‌گذاران برای وضع سیاست‌های منصفانه و کاملاً شفاف دربارهٔ ریسک و هم‌چنین جهت نظارت بر حسن اجرای آن‌ها، به مقادیر کمّی ریسک نیازمندند. مدیران به دنبال ایجاد توازن بین ریسک و بازدهٔ سرمایه‌گذاری هستند. ریاضی‌دانان هم درصددند این نیازها را با تدوین ابزارهای قوی و در عین حال سادهٔ ریاضی پاسخ دهند.

به‌منظور نیل به هدف اندازه‌گیری ریسک، ابزار مختلفی در حیطهٔ ریاضیات و مهندسی مالی به‌ویژه در سال‌های اخیر تدوین شده است. اهمیت توسعهٔ چنین ابزارهایی تا بدانجاست که برخی روش‌های اندازه‌گیری ریسک، از ساده‌ترین مدل‌های آماری گرفته تا پیچیده‌ترین معادلات، جایزهٔ نوبل را نصیب مبدعان خود کرده است.

افزایش پیچیدگی ابزار و بازارهای مالی در طی زمان، خلق سنجه‌های پیچیده‌تر را به‌دنبال داشته است. جدول (۱-۱) شامل فهرست مهم‌ترین ابزار تدوین‌شده در طی ۷۰ سال گذشته برای اندازه‌گیری ریسک است.

1. risk measurement

سال تولد	ابزارهای مدیریت ریسک
۱۹۳۸	دیرش اوراق قرضه[1]
۱۹۵۲	مدل میانگین-واریانس مارکویتز[2]
۱۹۶۳	مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای[3]
۱۹۶۶	مدل‌های چندعاملی[4]
۱۹۷۳	مدل قیمت‌گذاری اختیارمعاملهٔ بلک-شولز[5]
۱۹۸۸	دارایی‌های ریسک موزون برای بانک‌ها[6]
۱۹۹۲	آزمون استرس[7]
۱۹۹۳	ارزش درمعرض‌ریسک[8]
۱۹۹۴	ریسک‌متریکس[9]
۱۹۹۷	کرِدیت‌متریکس[10]
۲۰۰۰	مدیریت جامع ریسک بنگاه اقتصادی[11]

جدول (۱-۱): سیر تحول ابزارهای تحلیلی مدیریت ریسک

انواع ریسک

تمامی بنگاه‌ها در معرض دو گروه کلی از ریسک، یعنی ریسک‌های تجاری[12] و غیرتجاری[13] اند. ریسک‌های تجاری، ریسک‌هایی است که از بطن کسب و کار شرکت و فعالیت‌های آن ناشی می‌شود. این ریسک‌ها به بازار محصولات و خدماتی بستگی دارد که

1. bond duration
2. Markowitz mean-variance model
3. capital asset pricing model (CAPM)
4. multifactor models
5. Black-Scholes option pricing model
6. risk-weighted assets for banks
7. stress testing
8. value at risk (VaR)

۹. ریسک‌متریکس، (RiskMetrics) مجموعه‌ای از فنون خاص برای اندازه‌گیری ریسک بازار است.

۱۰. کرِدیت‌متریکس، (CreditMetrics) مدلی خاص برای اندازه‌گیری ریسک اعتباری است.

11. enterprise wide risk management (EWRM)
12. business risks
13. nonbusiness risks

بنگاه در آن فعالیت می‌کند و شامل نوآوری‌ها در فن‌آوری، طراحی خدمات و محصولات و بازاریابی آن‌ها می‌شود. فعالیت‌های تجاری هر بنگاه در معرض ریسک‌های کلان اقتصادی نیز قرار دارد. این ریسک‌ها از چرخه‌های اقتصادی و یا حتی از تغییر سیاست‌های پولی و مالی دولت ناشی می‌شود.

ریسک‌های غیرتجاری شامل تمامی ریسک‌ها غیر از ریسک‌های تجاری است. ریسک استراتژیک از این جمله است که حاصل جابجایی‌های اساسی در محیط‌های اقتصادی یا سیاسی است. سلب مالکیت و ملی‌شدن بنگاه‌ها از نمونه‌های این ریسک است.

ریسک‌های مالی[1] در حیطهٔ ریسک‌های غیرتجاری قرار می‌گیرد. این ریسک‌ها ناشی از تقبّل زیان‌های احتمالی در بازارهای مالی است. می‌توان به‌منظور تمرکز بنگاه‌ها بر اموری که در آن‌ها تسلط دارند، ریسک‌های مالی را بهینه کرد. برخلاف بنگاه‌های صنعتی، وظیفهٔ اصلی مؤسسات مالی، مدیریت فعال ریسک‌های مالی است. مدیریت ریسک‌های مالی به طراحی و اجرای رویه‌هایی اشاره دارد که به کنترل ریسک‌های مالی منجر می‌شود. از آنجا که تمرکز این کتاب بر ریسک‌های مالی و نوع خاص آن یعنی ریسک بازار است، به جای شرح بیشتر ریسک‌های دیگر، به بررسی ریسک مالی می‌پردازیم.

ریسک‌های اساسی مؤسسات مالی

یکی از مهم‌ترین اهداف مؤسسات مالی افزایش بازدهی است، اما این مسأله غالباً به‌قیمت افزایش ریسک (به معنی عدم‌اطمینان در دستیابی به بازدهٔ موردانتظار) برای مؤسسه تمام شود. بنابراین، مدیران ریسک در مؤسسات مالی به‌دنبال آن اند که بین ریسک و بازده توازن ایجاد کنند؛ توازنی که در نهایت به بیشینه‌سازی ثروت سهام‌داران بیانجامد. بدیهی است این هدف بدون شناخت اقسام ریسک‌های حاکم بر فعالیت‌های مؤسسات مالی ممکن نیست.

در صفحهٔ بعد فهرستی از ریسک‌هایی را ملاحظه می‌کنید که اغلب مؤسسات مالی در خلال فعالیت‌های خود با آن‌ها دست و پنجه نرم می‌کنند.

1. financial risks

نام	توصیف
ریسک اعتباری[1]	ریسک عدم‌وصول تسهیلات اعطایی و عدم‌ایفای تعهدات از جانب طرف قرارداد
ریسک نقدینگی[2]	ریسک نقدشوندگی مطالبات مشتریان به‌صورت آنی و نیاز بانک به تبدیل فوری دارایی‌ها به پول نقد
ریسک نرخ بهره[3]	ریسک کاهش ارزش دارایی‌ها به‌علت نوسان نرخ بهره
ریسک بازار[4]	ریسک کاهش ارزش دارایی‌ها و پرداخت‌ها به علت تغییر نرخ‌ها و قیمت‌های بازار
ریسک خارج ترازنامه[5]	ریسک مؤسسه ناشی از نتایج فعالیت‌های مربوط به دارایی‌ها یا پرداخت‌های اقتضایی
ریسک نرخ ارز[6]	ریسک ناشی از تغییر ارزش دارایی‌ها یا بدهی‌های ارزی به‌علّت تغییر نرخ ارز
ریسک حاکمیت[7]	ریسک عدم‌بازپرداخت مشتریان خارجی به‌علّت دخالت دولت‌های خارجی
ریسک ناتوانی در پرداخت[8]	ریسک ناشی از عدم‌وجود سرمایهٔ مکفی برای جبران کاهش ارزش دارایی‌ها

جدول(۱-۲): فهرست ریسک‌های مطرح برای مؤسسات مالی

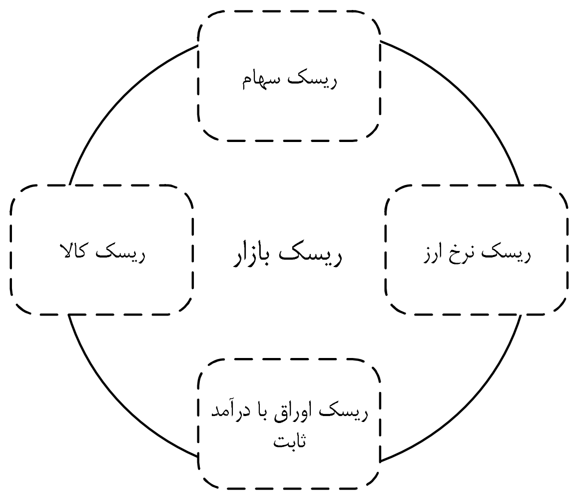
در جدول فوق، فهرست نسبتاً بلندی از انواع ریسک‌های مالی ارایه شده است. دشواری کار با چنین فهرست بلندبالایی از ریسک ما را بر آن می‌دارد که با ترکیبی از آن‌ها کار کنیم. مثلاً، ریسک نرخ ارز را می‌توان در ریسک بازار خلاصه نمود. به‌علاوه، چون به‌راحتی نمی‌توانیم مرز میان تمامی این ریسک‌ها را روشن کنیم، استفاده از همهٔ آن‌ها امری غامض است. به همین دلیل، در ادامه به تعدادی از ریسک‌ها اشاره می‌کنیم که مهم‌ترین عوامل توجیه‌کنندهٔ تلاطم[9] یا نوسان بازده در مؤسسات مالی‌اند. این ریسک‌ها شامل ریسک بازار، اعتباری، نقدینگی و عملیاتی است. مؤسسات مالی با این ریسک‌ها آشناترند و برای آن‌ها سیستم‌های کنترل و مدیریت بیشتری تدارک دیده‌اند.

1. credit risk
2. liquidity risk
3. interest rate risk
4. market risk
5. off-balance-sheet risk
6. foreign exchange risk
7. sovereign risk
8. insolvency risk
9. volatility

ریسک بازار

ریسک بازار، ریسک زیان ناشی از حرکات[1] یا نوسان‌های غیرمنتظرۀ قیمت‌ها یا نرخ‌های بازار است؛ با این تعریف می‌توان آن را از سایر انواع ریسک‌ها مثل ریسک اعتباری و عملیاتی تمیز داد. درعین‌حال، ریسک بازار را نمی‌توان به‌طور کامل از چنین ریسک‌هایی تفکیک نمود، چراکه گاهی اوقات آن ریسک‌ها منشأ ریسک بازارند. به‌عنوان مثال، رویدادهای اعتباری[2] ممکن است به تغییر قیمت اوراق قرضه منجرشده و بدین‌ترتیب محرک زیان‌های ناشی از ریسک بازار شود. رویدادهای عملیاتی[3] نیز ممکن است به زیان‌های بازار منجر شود. اقدامات سفته‌بازانۀ معامله‌گری در بانک بارینگز[4] که به صفرشدن ارزش سهم آن بانک منجر شد، مثال خوبی در این زمینه است.

لایه‌های مختلفی از ریسک بازار وجود دارد. در نمودار زیر لایه‌بندی‌ای از ریسک بازار ارایه شده است.



نمودار (۱-۱): لایه‌های ریسک بازار

1. movements
2. credit events
3. operational events
4. Barings bank

دراین نمودار، خطوط نقطه‌چین گویای تأثیرپذیری ریسک بازار از دیگر منابع ریسک است. لایه‌های مختلف ریسک بازار عبارت است از:

- ریسک سهام: لایه‌ای از ریسک بازار است که به موقعیت‌های بازار سهام مربوط می‌شود.
- ریسک اوراق بهادار با درآمد ثابت: ریسک‌هایی است که به موقعیت ابزار با درآمد ثابت، مانند اوراق قرضه و ابزار حساس به نرخ بهره[1] مانند تاخت نرخ بهره[2] مربوط می‌شود.
- ریسک نرخ ارز: ریسک‌های مربوط به موقعیت‌های خارجی و نرخ‌های متقابل ارز است.
- ریسک کالا[3]: ریسک‌هایی است که به موقعیت‌های مؤسسه در ارتباط با کالاهایی چون فرآورده‌های کشاورزی، انرژی، فلزات و مشابه این‌ها مربوط می‌گردد.

ریسک بازار به‌لحاظ کمّی به دو صورت بیان می‌شود. ریسک مطلق[4] که با واحد پولی سنجیده می‌شود و ریسک نسبی[5] که نسبت به شاخصی معین اندازه‌گیری می‌شود. صورت اول بر تلاطم بازدۀ کل تمرکز می‌کند. صورت دوم، ریسک را بر اساس خطای ردگیری[6] یا انحراف از یک شاخص اندازه می‌گیرد. ارزش درمعرض‌ریسک مثالی برای ریسک مطلق و ضریب بتا نمونه‌ای از ریسک نسبی است.

ریسک اعتباری

ریسک اعتباری از این واقعیت ریشه می‌گیرد که طرف قرارداد[7] نتواند یا نخواهد تعهداتش را انجام دهد. تأثیر این ریسک با هزینۀ ریالی ناشی از نکول[1] طرف قرارداد سنجیده می‌شود.

---

1. interest-sensitive instrument
2. interest rate swap
3. commodity risk
4. absolute risk
5. relative risk
6. tracking error
7. counterparty

زیان‌های ناشی از ریسک اعتباری ممکن است قبل از وقـوع واقعـی نکـول از جانـب طرف قرارداد، ایجاد شود. بنابراین، ریسـک اعتبـاری را می‌تـوان بـه‌عنوان زیـانی محتمـل تعریف کرد که در اثر یک رویداد اعتباری اتفاق می‌افتد. رویداد اعتباری زمانی واقع می‌شود که توانایی طرف قرارداد در انجام تعهداتش تغییر کند. با این تعریف، تغییر ارزش بازار بدهی به‌خاطر تغییر رتبه‌بندی اعتباری (یا تغییر آگاهی بازار از توانایی طرف قرارداد نسبت به انجام تعهداتش) را نیز می‌توان به‌عنوان ریسک اعتباری در نظر گرفت. این مورد، تـا حـدی بـین ریسک اعتباری و ریسک بازار همپوشانی ایجاد می‌کند.

اوراق قرضه، وام و اوراق مشتقه همگی ریسک اعتباری دارند. برای اوراق مشتقه مانند قراردادهای تاخت[2]، ریسک اعتباری بسیار کمتر است، زیرا عموماً قرارداد به‌گونه‌ای تنظـیم می شود که ارزش اولیهٔ آن صفر باشد. اما، این قراردادها زمانی با ریسـک اعتبـاری همـراه می‌شود که قرارداد به‌نفع یک طرف ارزشمند شـود و طـرف مقابـل از انجـام تعهـداتش در سررسید قصور نماید. بنابراین، اندازه‌گیری ریسـک اعتبـاری در قراردادهـای تاخـت شـامل تحلیل رابطهٔ ریسک بازار و ریسک اعتباری است.

ریسک اعتباری شامل ریسک حاکمیت هم می‌شود. این ریسک به‌عنوان مثال زمـانی آشکار می‌شود که کشورها روی نرخ تبدیل ارز اعمال کنترل کنند و طرفین قرارداد نتواننـد به تعهدات خود وفادار بمانند. در حـالی کـه ریسـک نکـول معمـولاً مخـتص شـرکت‌ها و اشخاص است، ریسک حاکمیت به کشورها مربوط می‌شود.

یک حالت خاص ریسک اعتباری، ریسک تسویه[3] اسـت. ایـن ریسـک زمـانی تحقـق می‌یابد که مقرر باشد دو پرداخت در یک روز جابه‌جا شود، امـا بعـد از این‌کـه یـک طـرف قرارداد پرداخت خود را انجام داد، طرف مقابل مرتکب نکول شود. در روز تسـویه، مبلـغ در معرض نکول طرف قرارداد به میزان کل پرداخت است، در حالی که در روزهای قبـل، ایـن مقدار فقط به اندازهٔ خالص ارزش دو پرداخت می‌باشد.

ریسک تسویه در معاملات ارز محسوس‌تر است، چراکه شامل مبادلهٔ ارزهای مختلـف در ساعت‌های مختلف روز می‌شود. در این مورد، تأخیر در پرداخت، حتی در طول یـک روز

---

1. default
2. swap contracts
3. settlement risk

نیز نکول تلقی می‌شود. وقتی بانک هرشتات[1] در ۱۹۷۴ در کشور آلمان ورشکسته شد، تعدادی از پرداخت‌ها را از یک طرف دریافت کرده بود، اما قبل از این‌که پرداخت‌های متقابل را انجام دهد، مرتکب نکول شده بود. این واقعه نشان‌گر بی‌ثباتی معاملات در سیستم بانکی جهانی بود. این بی‌ثباتی‌ها در تأسیس کمیتۀ بال[2] برای نظارت بر بانک‌ها در سطح جهانی بسیار مؤثر بود. کمیتۀ بال، ۱۵ سال بعد از این واقعه، شرط کفایت سرمایه را برای سیستم بانکی تصویب کرد.

ریسک نقدینگی

ریسک نقدینگی دو صورت دارد: ریسک نقدشوندگی دارایی‌ها[3] و ریسک نقدینگی تأمین وجوه[4]. ریسک نقدشوندگی دارایی‌ها که با نام ریسک نقدینگی بازار-محصول[5] هم شناخته می‌شود، زمانی بروز می‌کند که معامله با قیمت رایج بازار قابل‌اجرا نباشد و علت آن ممکن است حجم یا اندازۀ موقعیت خرید یا فروش نسبت به معاملات عادی باشد. این ریسک در میان طبقات مختلف دارایی‌ها و نیز در زمان‌های مختلف، بسته به شرایط بازار تغییر می‌کند. بعضی دارایی‌ها مانند ارزهای اصلی یا اوراق قرضۀ خزانه، بازار پرعمق دارند و موقعیت‌ها اغلب به‌راحتی، با تلاطم کوچکی در قیمت نقد می‌شود. در سایر موارد، مانند قراردادهای مشتقه در بازارهای فرابورس یا اوراق بهادار بازارهای نوظهور، هر معامله ممکن است به‌سرعت قیمت‌ها را متأثر کند و صف خرید یا فروش پیدا شود. البته، این موضوع به حجم موقعیت هم بستگی دارد.

ریسک نقدینگی تأمین وجوه یا ریسک جریان نقدی[6] به عدم‌توانایی در تأمین وجوه برای پرداخت تعهدات برمی‌گردد. این وضعیت ممکن است مؤسسه را مجبور کند دارایی‌های خود را فوراً به وجه نقد تبدیل کند و بدین ترتیب ضرر روی کاغذ به ضرر واقعی

---

1. Herstat bank
2. Basel Committee
3. assets liquidity risk
4. funding liquidity risk
5. market-product liquidity risk
6. cash flow risk

تبدیل می‌شود. این موضوع بویژه در مورد سبد دارایی‌هایی[1] که با وام تأمین مالی شده است، به هنگام مواجهه با اخطار تأدیهٔ وثیقه[2] از جانب طلبکاران، به معضل بدل می‌شود.

ریسک جریان نقدی زمانی به ریسک نقدینگی بازار-محصول مرتبط می‌شود که سبد مؤسسه شامل دارایی‌هایی با نقدشوندگی پایین باشد و مؤسسه ناچار باشد برای تأمین تعهدات خود این دارایی‌ها را به قیمتی پایین‌تر از قیمت عادلانهٔ بازار به فروش رساند. بنابراین، اگر ذخیرهٔ وجه نقد کافی نباشد، ممکن است در شرایطی که ارزش بازار دارایی‌ها سقوط کرده است، الزام به پرداخت وجوه نقد و ایفای تعهدات، مؤسسه را به نقدکردن اجباری سبد دارایی در قیمت‌های پایین‌آمده وادار نماید. این چرخهٔ قبول ضرر که با دریافت اخطار تأدیهٔ وثیقه شدیدتر می‌شود، گاهی به مارپیچ مرگ تعبیر می‌گردد.

ریسک عملیاتی

کمیتهٔ بال، به‌عنوان مرجع بین‌المللی در زمینهٔ تعریف مفاهیم رایج در صنعت بانکداری، ریسک عملیاتی را به‌صورت زیر تعریف کرده است:

> ریسک زیان ناشی از فرآیندهای داخلی، افراد و سیستم‌های غیردقیق (ناکافی) یا معیوب یا ریسک زیان ناشی از حوادث خارجی را گویند.[3]

ریسک‌های عملیاتی ممکن است به ریسک‌های اعتباری و بازار منجر شود. به‌عنوان مثال، یک اشتباه عملیاتی در معامله مانند عدم‌انجام تسویه می‌تواند به‌طور هم‌زمان ریسک ریسک اعتباری و بازار ایجاد کند، چراکه همانند نکول اعتباری، قیمت‌های بازار را متأثر می‌سازد.

قیمت‌گذاری مشتقه‌های پیچیده هم مشکلات عملیاتی بالقوه‌ای ایجاد می‌کند. ریسک مدل[4] از خطر اشتباه در مدل قیمت‌گذاری موقعیت‌ها ناشی می‌شود. مثلاً، معامله‌گری که از مدل عمومی قیمت‌گذاری قرارداد اختیارمعامله استفاده می‌کند، اگر در پیاده‌سازی مدل یا تخمین پارامترها اشتباه کند، در معرض ریسک مدل است. متأسفانه، ریسک مدل بسیار بی

1. portfolios
2. margin call
3. Basel II, (June 2004).
4. model risk

سر و صداست و به همین دلیل شناسایی و ارزیابی آن چندان ساده نیست. ارزیابی این ریسک به اطلاع دقیق از رویهٔ مدل‌سازی نیاز دارد. برای مقابله با ریسک مدل، باید مدل‌ها را با استفاده از قیمت‌های بازار یا قیمت‌های شبیه‌سازی‌شده، مورد ارزیابی مستقل قرار داد.

بهترین راه مقابله با ریسک عملیاتی حصول اطمینان از اعتبار سیستم‌ها و مدل‌ها، تفکیک شفاف مسئولیت‌ها، اعمال کنترل‌های داخلی قوی و پیاده‌سازی برنامه‌های اقتضایی دوره‌ای است. اندازه‌گیری ریسک عملیاتی برای متخصصان کمّی‌سازی ریسک چالش بزرگی محسوب می‌شود. در سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی در جهت توسعهٔ مدل‌های ریسک عملیاتی صورت گرفته است و در آینده شاهد مدل‌های دقیق‌تر و در عین حال پیچیده‌تری خواهیم بود.

ریسک سیستماتیک[1] و غیرسیستماتیک[2]

تقسیم‌بندی دیگری از ریسک‌های مالی قابل‌ارایه است که به فراگیر یا اختصاصی‌بودن عوامل ایجاد تلاطم برمی‌گردد. در تحلیل مدرن سرمایه‌گذاری[3]، منابع ریسک، به‌عنوان عوامل موجد تلاطم در بازدهٔ دارایی‌ها، به دو گروه کلی تقسیم‌بندی می‌شود:

دستهٔ اول، عواملی است که کلیهٔ اوراق بهادار را تحت تأثیر قرار می‌دهد؛ نرخ بهره، تورم و نرخ ارز جزو این دسته عوامل است. به ریسکی که به‌واسطهٔ این عوامل به‌وجود می‌آید، ریسک سیستماتیک یا تنوع‌ناپذیر[4] می‌گویند. دستهٔ دوم، عواملی است که تنها بر یک یا چند ورقهٔ بهادار خاص اثر می‌گذارد. اعتصاب کارکنان شرکت، آتش‌سوزی در یکی از واحدها و فوت یکی از افراد کلیدی سازمان مثال‌هایی از این عوامل است. ریسکی که به‌واسطهٔ این عوامل به‌وجود می‌آید، به ریسک غیرسیستماتیک یا تنوع‌پذیر[5] معروف است. ریسک غیرسیستماتیک را می‌توان با استفاده از فنون تنوع‌بخشی[6] کاهش داد. بدین ترتیب،

1. systematic risk
2. nonsystematic risk
3. modern investment analysis
4. nondiversifiable risk
5. diversifiable risk
6. diversification techniques

ریسک کل یک دارایی را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع ریسک قابل‌اجتناب[1] و غیرقابل‌اجتناب[2] درنظر گرفت:

ریسک کل = ریسک قابل‌اجتناب (غیرسیستماتیک) + ریسک غیرقابل‌اجتناب (سیستماتیک)

از آنجا که عوامل سیستماتیک از شرایط کلی بازار و عوامل غیرسیستماتیک از شرایط خاص یک شرکت ناشی می‌شود، می‌توان ریسک کل دارایی را به‌صورت زیر بیان کرد:

ریسک کل = ریسک مختصِ شرکت + ریسک بازار

سنجه‌های ریسک

تاکنون صاحب‌نظران سنجه‌های[3] مختلفی برای اندازه‌گیری ریسک معرفی کرده‌اند که هر یک به جنبه‌ای از مقولهٔ عدم‌اطمینان اشاره دارد و بعضاً مکمل یکدیگرند. معیارهای اندازه‌گیری ریسک اول بار با مطالعهٔ شاخص‌های پراکندگی آماری تعیین شد و پس از آن سنجه‌های جدیدتری مانند دیرش، ضریب بتا و ارزش درمعرض‌ریسک توسعه یافت.

تلاش‌ها برای طراحی ابزار اندازه‌گیری ریسک از نیمهٔ اول قرن بیستم آغاز شد. مکالی[4] در سال ۱۹۳۸، دیرش[5] را به‌عنوان سنجهٔ ریسک معرفی کرد که ابزاری ساده و در عین حال کارآمد برای سنجش ریسک اوراق بهادار با درآمد ثابت است. ادامهٔ بررسی‌های مکالی به شناسایی رابطهٔ غیرخطی ارزش اوراق بهادار با درآمد ثابت و نرخ بهرهٔ بازار منتهی شد و معیار تحدب[6] به‌عنوان شاخصی مکمل برای محاسبهٔ ریسک این اوراق معرفی گردید. در سال ۱۹۵۲، مارکویتز[7] با ارایهٔ مدلی کمّی جهت انتخاب سبد دارایی‌ها، برای اولین بار

1. avoidable risk
2. unavoidable risk
3. measures
4. Macaulay
5. duration
6. convexity
7. Markowitz

مقولهٔ ریسک را در کنار بازده مدنظر قرار داد. وی انحراف‌معیار را به‌عنوان سنجهٔ ریسک درنظر گرفت. شاگرد او ویلیام شارپ[۱]، شاخص بتا را برای اندازه‌گیری تغییرات نسبی ارزش هر سهم در قبال تغییرات نسبی ارزش بازار با معرفی خط مشخصات[۲] ارایه کرد. وی با طراحی مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای، مدیریت علمی سبد دارایی را پایه‌گذاری نمود.

بعد از دههٔ ۱۹۷۰ و افزایش روزافزون ریسک در جنبه‌های مختلف تصمیمات مالی، توجه مدیران بیش از پیش به اندازه‌گیری و مدیریت ریسک جلب شد. در این دوران، کنترل ریسک به‌عنوان عاملی برای ایجاد ارزش بیشتر مورد توجه قرار گرفت و نرخ‌های بازدهی تعدیل‌شده بر اساس ریسک[۳]، ملاک ارزیابی‌ها قرار گرفت.

برخی نظریه‌های قدیمی که به‌علت زمان‌بربودن و پیچیدگی‌های محاسباتی کنار گذاشته شده بود، هم‌زمان با پیدایش ابررایانه‌ها مجدداً مطرح شد. ریسک نامطلوب[۴] از جملهٔ این نظریه‌ها بود که قبلاً توسط پیشگامان علم مالی مطرح شده بود و در سال ۱۹۹۶ جانی دوباره یافت و تحقیقات مفصّلی در آن مورد انجام گرفت که چالش‌های آن هنوز هم ادامه دارد.

در سال ۱۹۹۳، مؤسسهٔ جی. پی. مورگان[۵] مدل ارزش درمعرض‌ریسک را معرفی کرد. این معیار که تمامی انواع ریسک را در یک عدد خلاصه می‌کرد، برای استفاده‌کنندگان بسیار جذاب به‌نظر آمد و هر روز به کاربردهای آن افزوده شد. به‌دنبال آن، روش‌های محاسباتی پیچیده‌ای همانند فرآیندهای تصادفی[۶] و شبیه‌سازی برای افزایش دقت مدل‌های این سنجه توسعه یافت.

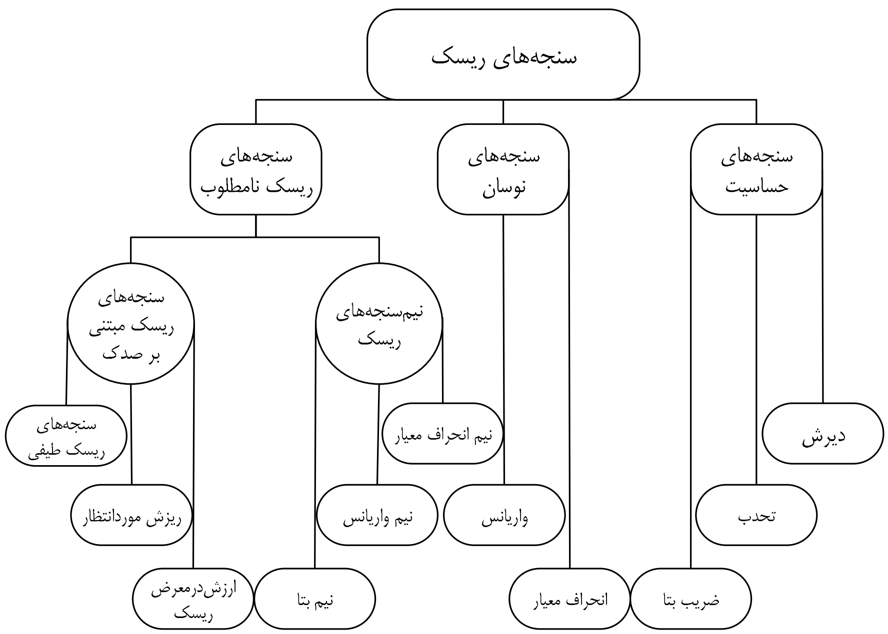
با توجّه به تاریخچهٔ تحقیقات و تلاش‌های به عمل آمده در جهت اندازه‌گیری ریسک و پیشرفت‌هایی که در هر دوره به‌وقوع پیوسته است، می‌توان گروه‌بندی‌ای از سنجه‌های ریسک ارایه داد که بر نحوهٔ اندازه‌گیری ریسک استوار است:

---

1. William Sharpe
2. characteristic line
3. risk-adjusted returns
4. downside risk
5. J. P. Morgan
6. stochastic processes

- سنجه‌های تلاطم[1]: این سنجه‌ها، پراکندگی یک متغیر را در اطراف میانگین و یا پارامتر تصادفی دیگر اندازه‌گیری می‌کند. واریانس و انحراف‌معیار دو نمونه از این سنجه‌هاست.
- سنجه‌های حساسیت[2]: موضوع اندازه‌گیری این سنجه‌ها تغییرات متغیر وابسته بر اثر تغییرات متغیر مستقل است. دیرش و ضریب بتا دو نمونه از این سنجه‌هاست.
- سنجه‌های ریسک نامطلوب[3]: این سنجه‌ها برعکس سنجه‌های تلاطم، تنها بر بخش مخرب ریسک تمرکز دارد و تلاطم‌های زیر سطح میانگین و یا متغیر هدف را محاسبه می‌کند. نیم‌واریانس، نیم‌بتا و ارزش درمعرض‌ریسک از این نوع سنجه‌هاست.

نمودار زیر گروه‌بندی یادشده را به نمایش می‌گذارد.



نمودار (۱-۲): گروه‌بندی سنجه‌های ریسک

1. volatility measures
2. sensitivity measures
3. downside risk measures

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید سنجه‌های ریسک نامطلوب، به دو زیرگروه تقسیم‌بندی شده است. این زیرگروه‌ها شامل نیم‌سنجه‌های ریسک[1] و سنجه‌های ریسک مبتنی بر صدک[2] است. تمرکز کتاب حاضر، بر سنجه‌های ریسک مبتنی بر صدک است. ارزش درمعرض‌ریسک، ریزش موردانتظار[3] و سنجه‌های ریسک طیفی[4] مثال‌هایی از این سنجه‌هاست.

در این‌جا، به معرفی برخی از معروف‌ترین و پرکاربردترین سنجه‌های ریسک در قالب گروه‌بندی ارایه‌شده می‌پردازیم؛ در انتهای فصل و نیز در ادامهٔ این کتاب روی موضوع مورد علاقه، یعنی سنجه‌های ریسک مبتنی بر صدک، خصوصاً ارزش درمعرض‌ریسک و ریزش موردانتظار متمرکز می‌شویم.

سنجه‌های تلاطم

همان‌طور که گفتیم، این سنجه‌ها تلاطم‌های متغیر تصادفی را اندازه‌گیری می‌کنند. اغلب نقطه‌ای دلخواه مانند میانگین به‌عنوان مبنای محاسبهٔ تلاطم درنظر گرفته می‌شود. دامنهٔ تغییرات، متوسط قدرمطلق انحرافات، واریانس و انحراف‌معیار نمونه‌هایی از این سنجه‌هاست.

دامنهٔ تغییرات

طبق تعریف، تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار از صفت متغیر مورد مطالعه را دامنه یا طول فاصلهٔ تغییرات گویند و آن را با R نشان می‌دهند:

$$R = X_{\max} - X_{\min} \qquad (۱-۱)$$

1. semi risk measures
2. quantile-based risk measures
3. expected shortfall
4. spectral risk measures

سنجۀ مزبور مشخصۀ پراکندگی صفت متغیر را بـه‌خوبی نمایـان نمی‌کنـد، چراکـه از مجموعۀ مشاهدات، تنها بـه بزرگ‌تـرین و کوچـک‌ترین مشـاهده اکتفـا می‌کنـد و عمـلاً مجموعه‌ای از اطلاعات را نادیده می‌گیرد. این سنجه برای محاسـبۀ تلاطـم نـرخ بـازدهی دارایی‌های مالی نیز معیار مناسبی نیست، زیرا بازارهای مالی گاهی با رکود و گاهی با رونق مواجه است و در صورت انتخاب یکی از دوره‌های رکود یا رونق، عدد محاسبه‌شده قابل‌اتکا نخواهد بود و عملاً سایر نرخ‌های بازدهی را در محاسبۀ ریسک منظور نمی‌کند.

متوسط قدر مطلق انحرافات[1]

دامنۀ تغییرات تعریفی بسیار تقریبی از پراکندگی به‌دست می‌دهد، چرا که تنهـا بـه دو عضو از مجموعۀ مشاهدات توجه دارد. بنابراین، سنجۀ دیگـری لازم اسـت کـه عـلاوه بـر احتساب پراکندگی، کلیۀ مشاهدات را شـامل شـود. بـدین منظـور، ابتـدا انحـراف انفـرادی تک‌تک مشاهدات از میانگین حسابی محاسبه می‌شود:

$$d_i = X_i - \overline{X} \qquad (۱-۲)$$

سپس، برای این‌که مشخصۀ موردنظر تمامی مشاهدات را در برگیرد، حاصل‌جمع کلیۀ انحرافات انفرادی محاسبه می‌شود . البته، به‌علت این‌که مجموع اعداد منفی و مثبت در این حاصل‌جمع قرینه‌اند و یکدیگر را خنثی می‌کنند، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}) = 0 \qquad (۱-۳)$$

به همین منظور، از علامت قدر مطلق استفاده می‌شود تا پراکندگی، مستقل از علامت ظاهر شود. در آخرین مرحله نیز میانگین حسـابی قـدرمطلق انحراف‌هـا محاسـبه می‌شـود. سنجۀ به‌دست آمده متوسط قدر مطلق انحرافات نامیده می‌شود:

$$\overline{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - \overline{X}\right|}{n-1} \qquad (۱-۴)$$

---

1. mean absolute deviation

این شاخص، علامت مشاهدات را منظور نمی‌کند و با استفاده از تابع قدر مطلق، تمامی مشاهدات را به عدد مثبت تبدیل می‌کند. بنابراین، نرخ‌های بازدهی منفی به مثبت تبدیل شده و عملاً این سنجه میزان پراکندگی را کمتر از واقعیت نشان می‌دهد. به عبارت دیگر، تابع قدر مطلق تنها بر برخی از مشاهدات اثر می‌گذارد و نسبت به اعداد مثبت خنثی است.

متوسط مجذور انحرافات[1]

چون حاصل‌جمع انحرافات مشاهدات از میانگین برابر صفر است، در متوسط قدر مطلق انحرافات از قدرمطلق مشاهدات استفاده می‌شود. روش دیگر برای نادیده‌گرفتن علامت مشاهدات، استفاده از مجذور آن‌هاست. سنجهٔ حاصل از این روش، متوسط مجذور انحرافات (واریانس[2]) است که در مباحث آماری از خانوادهٔ گشتاورها محسوب شده و خواص مفیدی از آن ذکر شده است. در این‌جا تنها به بیان رابطهٔ ریاضی آن بسنده می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1} \qquad (۵-۱)$$

انحراف‌معیار[3]

در محاسبهٔ واریانس برای جلوگیری از صفرشدن حاصل‌جمع انحرافات مشاهدات از میانگین، از مجذور انحرافات استفاده می‌شود. درعین حال، برای مقایسهٔ مشاهدات با مشخصهٔ پراکندگی، باید هر دو کمیّت از یک درجه باشد. بر این اساس، از واریانس جذر گرفته می‌شود. این شاخص جدید، انحراف‌معیار نام دارد.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad (۶-۱)$$

بنابراین، معیار مناسب‌تر محاسبهٔ ریسک براساس تعاریف آماری، انحراف‌معیار است. ذکر این نکته ضروری است که پیش‌فرض استفاده از واریانس و انحراف‌معیار، وجود توزیع

1. mean squared deviation
2. variance
3. standard deviation

نرمال برای صفت متغیر است، چرا که در این توزیع، انحراف‌معیار به‌عنوان شاخص پراکندگی تعریف می‌شود. لذا، اگر متغیر تصادفی از توزیع نرمال و یا دست‌کم توزیع متقارن برخوردار نباشد، انحراف‌معیار شاخص مناسب پراکندگی نخواهد بود.

انحراف‌معیار محاسبه‌شده بدین روش همان انحراف‌معیار تاریخی است. انحراف‌معیار تاریخی برای ارزیابی وضعیت گذشتهٔ تلاطم‌های بازده مفید است، ولی نمی‌توان از آن به‌عنوان برآورد مناسبی از ریسک کل یک ورقهٔ بهادار یا مجموعه‌ای از اوراق بهادار برای دوره‌های زمانی آتی استفاده نمود. چنانچه توزیع بازدهٔ اوراق بهادار نرمال باشد، انحراف‌معیار اطلاعات مفیدی در مورد تلاطم بازده فراهم می‌آورد.

سنجه‌های حساسیت

این سنجه‌ها، حساسیت متغیر تصادفی موردنظر را در قبال تغییرات متغیر تصادفی دیگری اندازه‌گیری می‌کند. یعنی، تغییرات متغیر موردنظر به‌عنوان تابعی از متغیری مستقل مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. دیرش، تحدب و ضریب بتا نمونه‌هایی از سنجه‌های حساسیت است.

دیرش

می‌دانیم که زمان‌بندی دریافت جریان‌های نقدی در اوراق بهادار با درآمد ثابت، بر ریسک و در نتیجه بر بازدهی این اوراق تأثیرگذار است. مفهوم دیرش نیز به زمان‌بندی جریان‌های نقدی اشاره دارد. این سنجه با ارایهٔ شاخصی برای دورهٔ بازیافت جریان‌های نقدی، ریسک تغییر قیمت اوراق قرضه را در قبال نوسان نرخ بهره اندازه‌گیری می‌کند.

تحدب

تحدب نیز مانند دیرش، سنجهٔ حساسیت قیمت اوراق بهادار با درآمد ثابت در مقابل نرخ بهره است. دیرش به تغییرات قیمت در قبال تغییرات نرخ بهره با فرض خطی‌بودن این ارتباط اشاره دارد. اما، تغییرات نرخ بهره و تغییرات قیمت رابطهٔ غیرخطی دارد. تحدب به اندازه‌گیری انحنای این رابطهٔ غیرخطی می‌پردازد.

ضریب بتا

ضریب بتا حساسیت بازدهٔ سهم را نسبت به بازدهٔ یک شاخص، مثلاً شاخص سهام، اندازه می‌گیرد و بر این اساس، نحوهٔ شکل‌گیری بازدهٔ قیمت‌ها را بر اساس تلاطم‌های شاخص توجیه می‌کند. ضریب بتا فرآیند محاسبهٔ مدل ریسک و بازدهٔ مارکویتز را تسهیل می‌کند، چراکه محاسبات این فرآیند به‌علت پیچیدگی و زمان‌بربودن، تا قبل از رواج ابررایانه‌ها، مقرون به‌صرفه نبوده است.

در این‌جا به بررسی بیشتر سنجه‌های تلاطم و حساسیت نمی‌پردازیم. در این زمینه کتاب‌های مدونی وجود دارد که جواب‌گوی نیازهای علاقه‌مندان است. در ادامه توجه شما را به گروه خاصی از سنجه‌های ریسک یعنی سنجه‌های ریسک نامطلوب جلب کنیم.

سنجه‌های ریسک نامطلوب

بنا به تعریف، ریسک نامطلوب احتمال تلاطم‌های منفی بازدهی در آینده است. در این بخش ابتدا به تاریخچهٔ سنجه‌های ریسک نامطلوب و سپس به معرفی و تشریح برخی سنجه‌های موجود در این گروه می‌پردازیم.

تاریخچهٔ سنجه‌های ریسک نامطلوب

ریسک نامطلوب از حوزه‌های پیشرفت دههٔ ۹۰ در خصوص سنجه‌های اندازه‌گیری ریسک است. مبدعان این روش، رام و فرگوسن[1] و هم‌چنین کاپلان و سیگل[2] بوده‌اند.

مفهوم ریسک از هنگامی که در متون مالی وارد شد، با ریسک نامطلوب همزاد بود. هنگامی که مارکویتز در سال ۱۹۵۲ مقالهٔ خود را در مورد ریسک و بازده با عنوان معیارهای انتخاب سبد بهینهٔ دارایی منتشر کرد، رُی[3] نیز مقاله‌ای در همین زمینه منتشر کرد. مقالهٔ وی نیز در خصوص به‌دست‌آوردن روشی عملی برای انتخاب بهترین ترکیب ریسک و بازده بود. رُی معتقد بود سرمایه‌گذاران ابتدا به‌دنبال امنیت اصل سرمایهٔ خود و سپس به‌دنبال کسب حداقل بازدهٔ قابل‌قبول خواهند بود. به‌عقیدهٔ وی، سرمایه‌گذاران بیش از آن‌که به

1. Rom and Ferguson
2. Kaplan and Siegel
3. Roy

حداکثر سود بیندیشند، در فکر حداقل‌کردن ریسک اند. وی حداقل بازدهی قابل‌قبول را سطح بحرانی[1] نامید و روش خود را بر اساس حفظ سطح بحرانی بازدهی برای سرمایه‌گذار طراحی کرد. رُی بیان داشت که سرمایه‌گذاران به‌دنبال نوعی سرمایه‌گذاری خواهند بود که احتمال وقوع بازدهی کمتر از سطح بحرانی را حداقل سازد. در این شرایط، سرمایه‌گذار باید نسبت بازدهی به تلاطم را به حداکثر برساند:

$$Max\left(\frac{E(r)-d}{S}\right) \quad (۷-۱)$$

در این رابطه، d سطح بحرانی و یا حداقل بازدهی فرضی سرمایه‌گذار است؛ $E(r)$ بازدهٔ موردانتظار و S انحراف‌معیار می‌باشد.

رُی مقالهٔ خود را سه ماه بعد از مارکویتز منتشر کرد و به همین علت نام مارکویتز به‌عنوان طراح نظریهٔ سبد دارایی ماندگار شد. مارکویتز در سال ۱۹۸۷ بیان داشت اگر هدف رُی طراحی مدلی برای انتخاب سبد بهینهٔ سرمایه‌گذاری با استفاده از موازنهٔ ریسک–بازده بوده، نظریهٔ سبد دارایی را باید به‌نام رُی خواند، چراکه مارکویتز در سال ۱۹۵۶ به تکمیل و ارایهٔ مدل اصلی خود بر اساس ریسک نامطلوب پرداخت. در واقع، کارهای رُی مقدمه‌ای برای توسعهٔ مدل‌های محاسبهٔ ریسک نامطلوب بود.

در سال ۱۹۵۹، مارکویتز به مزایای استفاده از روش ریسک نامطلوب اشاره کرد. وی به این نتیجه رسید که سرمایه‌گذاران به دو علت به‌دنبال کمینه‌کردن ریسک نامطلوب هستند: اول این‌که سرمایه‌گذاران ابتدا به امنیت اصل سرمایه می‌اندیشند و دوم این‌که اگر توزیع متغیر تصادفی (نرخ بازدهی) از نوع نرمال نباشد، استفاده از مدل ریسک نامطلوب، مناسب خواهد بود. او بعدها در سال ۱۹۹۱ نیز هنگام دریافت جایزهٔ نوبل برای ارایهٔ نظریهٔ سبد دارایی و مدل میانگین–واریانس، به این مسأله اشاره کرد.

بر این اساس، هنگامی که توزیع نرخ بازدهی نرمال باشد، واریانس و ریسک نامطلوب هر دو جوابی صحیح به‌دست می‌دهد، در حالی‌که اگر توزیع بازدهی دارایی از نوع نرمال نباشد، استفاده از واریانس برای محاسبهٔ ریسک روشی صحیح نیست. این در حالی است

1. disaster level (critical level)

که تحقیقات زیادی فرض نرمال‌بودن نرخ بازدهی را رد کرده است. تحقیقات اولیـه‌ای کـه توسط فاما و مندلبروت به انجام رسید، حاکی از وجود چولگی[۱] در توزیع بازدهی می‌باشد.[۲]

همان‌گونه که قبلاً گفتیم، سنجه‌های ریسک نامطلوب را می‌تـوان بـه دو گـروه کلـی نیم‌سنجه‌های ریسک و سنجه‌های ریسک مبتنی بر صدک تقسـیم‌بندی نمـود. اکنـون بـه تشریح هرکدام ازاین طبقات می‌پردازیم.

نیم‌سنجه‌های ریسک

مـارکویتز دو روش بـرای محاسـبهٔ ریسـک نـامطلوب پیشـنهاد کـرد. روش اول، نیم‌واریانسی است که از میانگین مجموع مجذور انحرافات پایین‌تر از میانگین نرخ بـازدهی به‌دست می‌آید و به آن نیم‌واریانس بازدهٔ میانگین[۳] یا نیم‌واریانس زیرمیانگین[۴] نیز می‌گویند. روش دوم، استفاده از نیم‌واریانسی است که از میانگین مجموع مجذور انحرافات پایین‌تر از نرخ بازدهی هدف حاصل می‌شود و به آن نیم‌واریانس بازدهٔ هدف[۵] یا نیم‌واریانس زیرهدف[۶] می‌گویند. روابط محاسباتی این دو سنجه به‌صورت زیر است:

$$SV_M = \frac{1}{k}\sum_{t=0}^{k}\left(Max[0,(E(r)-r_t)]\right)^2 \quad (۱-۸)$$

$$SV_T = \frac{1}{k}\sum_{t=0}^{k}\left(Max[0,(T-r_t)]\right)^2 \quad (۱-۹)$$

که SV_M نیم‌واریانس زیرمیانگین و SV_T نیم‌واریـانس زیرهـدف می‌باشـد؛ k تعـداد مشاهدات، $E(r)$ بازدهٔ موردانتظار و T نرخ بازدهی هدف است.

برای هدف‌گذاری بازدهی می‌توان از معیارهـای مختلفـی از جملـه نـرخ بـازدهٔ بـدون ریسک، الگوبرداری از بازدهٔ سایر دارایی‌ها مانند سبد بازار و یا هر معیار هدف‌گذاری دیگری استفاده کرد.

---

1. skewness
2. Fama (1963). Mandelbrot (1963).
3. mean return semivariance
4. below-mean semivariance
5. target return semivariance
6. below-target semivariance

مارکویتز در سال ۱۹۵۹ مدل واریانس را برای سهولت در انجام محاسبات معرفی کرد، چراکه در مدل نیم‌واریانس، باید ماتریس نیم‌کوواریانس نیز محاسبه شود و در مجموع حجم اطلاعات مورد نیاز آن دو برابر مدل واریانس می‌باشد. بررسی تحقیقات انجام‌گرفته نشان می‌دهد که از دیدگاه محققان علم مالی، این سنجه‌ها دارای رجحان نسبی است. کویرک و مائو[1] نشان دادند که سرمایه‌گذاران به‌لحاظ رفتاری و تمایلات فردی، بیشتر بر ریسک نامطلوب تمرکز دارند تا ریسکی که کلیهٔ تلاطم‌ها را در تعریف داشته باشد.

در خصوص توانایی نیم‌واریانس برای تبیین چگونگی توزیع احتمالات، ابهاماتی وجود دارد. اگر توزیع بازدهی دارایی از نوع نرمال باشد، سنجهٔ نیم‌واریانس عددی را به‌دست می‌دهد که دقیقاً نصف واریانس است. در غیر این صورت، یعنی اگر حاصل تقسیم نیم‌واریانس بر واریانس عددی غیر از ۰/۵ شود، در توزیع احتمالات متغیر تصادفی، چولگی وجود دارد. اگر چولگی توزیع احتمالات عددی منفی باشد، احتمال رخداد بازدهٔ کوچک‌تر نسبت به بازدهٔ بزرگ‌تر بیشتر است. برعکس، اگر چولگی توزیع احتمالات عددی مثبت باشد، بازده‌های بزرگ‌تر با احتمال بیشتری حادث خواهد شد.

سنجه‌های ریسک مبتنی بر صدک

به‌جرأت می‌توان گفت معروف‌ترین سنجهٔ موجود در این گروه، ارزش درمعرض‌ریسک است. این سنجهٔ ریسک موضوع اصلی کتاب حاضر است و اغلب مطالب فصل‌های بعدی در مورد معرفی این سنجه، رویکردهای مربوط به آن و نحوهٔ آزمون اعتبار آن می‌باشد. در این فصل تنها به بیان تاریخچه و اهمیت این سنجهٔ ریسک بسنده می‌کنیم؛ تعریف و نحوهٔ اندازه‌گیری آن را به فصل‌های بعدی واگذار می‌کنیم.

دیگر سنجه‌های موجود در این گروه، ریزش موردانتظار و سنجه‌های ریسک طیفی است؛ این سنجه‌ها به‌طور خاص در فصل سوم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تاریخچهٔ ارزش درمعرض‌ریسک

عبارت «ارزش درمعرض‌ریسک» تا اوایل دههٔ ۱۹۹۰ وارد ادبیات مالی نشده بود، امّا نقطهٔ آغازین توجه به ارزش درمعرض‌ریسک به سال‌ها پیش بازمی‌گردد، یعنی به حدود

1. Quirk and Mao

سال ۱۹۲۲ که در آن سال بورس اوراق بهادار نیویورک برای اولین بار به‌طور غیررسمی سرمایهٔ شرکت‌های عضو را موضوع آزمون قرار داد.

البته، مفهوم ارزش درمعرض‌ریسک اول بار توسط بامول در سال ۱۹۶۳ یعنی سه دهه قبل از کاربست وسیع آن، به‌هنگام بررسی مدلی با عنوان «معیار حد اطمینان عایدی موردانتظار»[1] پیشنهاد شد.[2] در عین حال، در نگاه کلی‌تر می‌توان گفت که «مدل‌های ایمنی»[3] استادان مالی‌ای چون رُی[4] در سال ۱۹۵۲ و تلسر[5] در سال ۱۹۵۵ مقدمهٔ شکل‌گیری مدل‌های ارزش درمعرض‌ریسک بوده است.

تیل گولدیمان را می‌توان مبدع عبارت ارزش درمعرض‌ریسک به‌حساب آورد.[6] در اواخر دههٔ ۸۰ ، او مدیر بخش تحقیقات بانک جی. پی. مورگان بود. گروه مدیریت ریسک باید در مورد این مسأله تصمیم می‌گرفت که آیا سرمایه‌گذاری بدون ریسک در قرضهٔ بلندمدت و تولید درآمد پایدار را انتخاب کند یا با سرمایه‌گذاری در ارز و سهام، ارزش بازار سهام خود را ثابت نگه دارد. بانک به این نتیجه رسید که ریسک ارزش[7] از ریسک درآمد[8] مهم‌تر است. این امر باعث شد که بانک یک گروه تحقیقاتی را برای پژوهش در زمینهٔ ریسک بسیج کند.

در آن زمان به مدیریت صحیح ریسک مشتقه‌ها توجه زیادی می‌شد. گروه سی[9] که نمایندهٔ جی. پی. مورگان هم در آن حضور داشت، سلسله مباحث بهترین روش مدیریت ریسک را آغاز کردند. عبارت «ارزش درمعرض‌ریسک» در ژوئیهٔ ۱۹۹۳ راه خود را در گزارش گروه سی پیدا کرد. این اولین بار بود که عبارت ارزش درمعرض‌ریسک به‌طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گرفت. اسامی دیگر ارزش درمعرض‌ریسک، سرمایهٔ درمعرض‌ریسک[10] و دلارهای درمعرض‌ریسک[1] بود که برای مدتی کاربرد داشت و زودتر از

1. expected-gain confidence limit criterion
2. Bamoul (1963).
3 . safety models
4. Roy (1952).
5. Telser (1955).
6. Guldimann (2000).
7. value risk
8. earning risk
9. Group of Thirty (G-30)
10. capital at risk

عبارت ارزش درمعرض‌ریسک در ادبیات ظاهر شد. با توجه بـه تاریخچـۀ یادشـده، اعتقـاد عمومی در ادبیات مالی بر این است که ارزش درمعرض‌ریسک رویکردی جدید برای اداره و کنترل ریسک است.

بحران‌های مالی، الزامات قانونی و ارزش‌درمعرض‌ریسک

آزادسازی و حذف مقررات زاید در اقتصـاد کشـورهای صـنعتی در اواخـر دهـۀ هفتـاد میلادی و اضمحلال نظام نرخ ثابت ارز در ابتدای آن دهه باعث شد تا بازارهـای مـالی بـا نوسان‌های بیشتری در متغیرهای قیمتی به‌ویژه نرخ‌های ارز مواجه گـردد. هم‌چنـین، بـروز شوک‌های نفتی به دفعات (شوک ۱۹۷۳، شوک اوایل دهۀ ۸۰ و شوک ۲۰۰۸) به‌دنبال خود جهش قیمت‌ها و نوسان‌های شدید در نرخ‌های بهره را در پی داشت. پیدایش اتحادیـه‌های پولی و روند جهانی‌شدن اقتصاد، باعث شد تا سرایت‌پذیری بحران‌های مالی از بـازاری بـه بازارهای دیگر بسـیار افـزایش یابـد و ایـن بـه‌معنای افـزایش تلاطـم در بازارهـای مـالی به‌هم‌پیوسته است. از سوی دیگر، افت شدید قیمت سهام در بسیاری از بازارهای سرمایه در زمان‌های مختلف به زیان‌های قابل‌توجـه بـرای عوامـل فعـال در آن بازارهـا منجـر شـد. به‌عنوان مثال، موارد زیر قابل‌توجه است:

- سقوط ۲۳ درصدی بازارهای سهام آمریکا در سـال ۱۹۷۸ بـا زیـانی بـالغ بـر ۱،۰۰۰ میلیارد دلار.
- بروز بحران مالی ژاپن در سال ۱۹۸۹ به‌دلیل تشکیل حباب در بازار بـورس بـا زیـانی بالغ بر ۲،۷۰۰ میلیارد دلار.
- بحران مالی شرق آسیا در سال ۱۹۹۷ با زیانی معادل ۷۵٪ سرمایۀ انباشـتۀ سـهام در کشورهای اندونزی، کره، مالزی و تایلند.
- نکول در بازار مالی روسیه در سال ۱۹۹۸ ناشی از ورشکستگی یک نهاد بزرگ مالی و تبدیل آن به بحران بین‌المللی.
- بحران مالی سال ۲۰۰۸ ناشی از نکول در بازار وام‌های رهنی آمریکا.

---

1. dollars at risk

هم‌چنین، تغییرات پیش‌بینی‌نشدهٔ سیاست‌های پولی توسط بانک‌های مرکزی، می‌تواند نوعی مولد ریسک در بازار مالی باشد، چنان‌که افزایش ناگهانی نرخ بهره توسط فدرال رزرو آمریکا در سال ۱۹۹۴، به زیانی بالغ بر ۱،۵۰۰ میلیارد دلار در بازارهای مالی جهـان منجـر شد.

در خصوص مقایسهٔ نسبی ابعاد زیان مالی ناشی از ریسک در سیستم بانکی کشورهای مختلف، می‌توان به موارد درج شده در جدول (۱–۳) اشاره داشت که توسط فیلیپ جوریون و بر اساس داده‌های بانک جهانی گردآوری شده است.[۱]

کشور و زمان وقوع	علت	هزینه بر حسب درصد *GDP*	هزینه بر حسب میلیارد دلار
ژاپن ۱۹۹۰	نوسان‌های قیمت، نکول وام‌ها	۱۴٪	۵۵۰
چین ۱۹۹۰	ناتوانی ۴ بانک دولتی بزرگ در پرداخت	۴۷٪	۴۹۸
آمریکا ۱۹۹۱– ۱۹۸۴	ورشکستگی ۱۴۰۰ مؤسسهٔ پس‌انداز و وام و ۱۳۰۰ بانک	۳٪/۷	۱۵۰
کره ۱۹۹۸	تجدیدساختار بانک‌ها	۲۸٪	۹۰
مکزیک ۱۹۹۵	تجدیدسرمایهٔ ۲۰ بانک	۱۷٪	۷۲
آرژانتین ۱۹۸۲– ۱۹۸۰	انحلال ۷۰ مؤسسهٔ مالی	۵۵٪	۴۶
تایلند ۱۹۹۷	بحران سیستم بانکی	۳۲٪	۳۶
اسپانیا ۱۹۸۵– ۱۹۷۷	ملی‌شدن ۲۰ بانک	۱۷٪	۲۸
مالزی ۱۹۹۷	بحران سیستم بانکی	۳۵٪	۲۵
سوئد ۱۹۹۴– ۱۹۹۱	تأمین مالی ۵ بانک بزرگ	۴٪	۱۵
ونزوئلا ۱۹۹۴	ناتوانی بانک‌ها در پرداخت	۲۰٪	۱۴
فرانسه ۱۹۹۵– ۱۹۹۴	معوق‌شدن تسهیلات تکلیفی بانک بزرگ کشور	۰٪/۷	۱۰
نروژ ۱۹۹۳– ۱۹۸۷	دولتی‌شدن ۳ بانک بزرگ کشور	۸٪	۸
اسرائیل ۱۹۸۳– ۱۹۷۷	بحران سیستم بانکی	۳۰٪	۸
شیلی ۱۹۸۳– ۱۹۸۱	انحلال ۸ مؤسسهٔ مالی	۴۱٪	۸
فنلاند ۱۹۹۳– ۱۹۹۱	بحران در مؤسسات پس‌انداز	۸٪	۷
استرالیا ۱۹۹۲–۱۹۸۹	تجدیدسرمایهٔ دو بانک بزرگ	۲٪	۶

جدول (۱–۳): زیان‌های مالی ناشی از ریسک در سیستم بانکی کشورهای مختلف بر اساس داده‌های بانک جهانی

1. Jorion (2000), p. 36.

علاوه بر این‌ها، بحران مالی سال ۲۰۰۸ و ورشکستگی پی‌درپی تعدادی از بزرگ‌ترین و معروف‌ترین بانک‌ها و دیگر نهادهای مالی، موجی از عدم‌اطمینان را به داخل بازارهای مالی سرازیر نمود. طی آخرین گزارش بانک جهانی در آوریل ۲۰۰۹، بحران اخیر ۴۰ هزار میلیارد یورو از دارایی‌های مالی جهان را نابود کرده است.

رخداد بحران‌های مالی در طی زمان، ظهور قوانین و مقررات جدید را به‌دنبال داشته است. مثلاً، در سال ۱۹۸۸ نمایندگان ارشد سیستم بانکی کشورهای گروه ۱۰ که مؤسسان اولیهٔ کمیتهٔ بال محسوب می‌شوند، توافقنامه‌ای موسوم به بال را به‌منظور ارایهٔ چارچوبی جهت تعیین کفایت سرمایهٔ بانک‌ها پیشنهاد کردند. این توافقنامه دارای ایرادهایی بود که یکی از آن‌ها عدم‌توجه به ریسک بازار در تعیین کفایت سرمایه بانک‌ها بود.

در پاسخ به انتقادات صنعت بانکداری از شیوهٔ استاندارد، کمیتهٔ بال در سال ۱۹۹۵ گزینه‌ای جدید موسوم به «چارچوب مدل‌های داخلی»[1] را به‌عنوان جایگزین روش استاندارد معرفی نمود که برای اولین بار به بانک‌ها اجازه می‌داد از مدل‌های تدوین‌شدهٔ خود، به‌طور مستقل برای اندازه‌گیری ریسک (با هدف تعیین میزان ذخیرهٔ سرمایهٔ لازم برای پوشش ریسک) استفاده کنند. بر این اساس، در سال ۱۹۹۶ کمیتهٔ بال مجموعه مقررات بال را به‌منظور لحاظ‌کردن ریسک بازار اصلاح نمود. این اصلاحیه که در پایان سال ۱۹۹۷ به اجرا درآمد، لزوم نگهداری سرمایه برای پوشش ریسک بازار را بر مبنای یکی از دو رویکرد استاندارد و یا مدل‌های داخلی مورد تأکید قرار داد. بر اساس رویکرد اخیر، بانک‌ها می‌توانند ریسک بازار را با استفاده از روش ارزش‌درمعرض‌ریسک اندازه‌گیری کنند که روشی استاندارد و پذیرفته‌شده به‌منظور اندازه‌گیری و کنترل ریسک است و از جایگاه ویژه‌ای در استانداردهای بین‌المللی برخوردار شده است. از آن به بعد، ارزش‌درمعرض‌ریسک به‌عنوان سنجه‌ای استاندارد برای تعیین ریسک بازار و به‌دنبال آن الزامات کفایت سرمایهٔ بانک‌ها درآمد.

مزیت‌های ارزش‌درمعرض‌ریسک، سایر مؤسسات مالی را نیز بر آن داشت تا از آن به‌عنوان سنجهٔ مناسب اندازه‌گیری ریسک بازار استفاده کنند. این مؤسسات از یک سو برای برآوردن الزامات کفایت سرمایه و نیز الزامات گزارش‌دهی و از طرفی دیگر، برای اندازه‌گیری و مدیریت ریسک بازار از ارزش‌درمعرض‌ریسک استفاده می‌کنند.

1. internal models framework

عمومیت ارزش درمعرض‌ریسک

ارزش درمعرض‌ریسک، جای خود را برای اندازه‌گیری انواع ریسک‌ها باز کرده است. این سنجه، مختص اندازه‌گیری ریسک بازار نیست، بلکه هر جا سخن از ریسک باشد، می‌توان آن را در قالب ارزش درمعرض‌ریسک، کمّی کرد. در حیطهٔ ریسک اعتباری به ارزش درمعرض‌ریسک اعتباری[۱] برمی‌خوریم؛ ریسک عملیاتی را می‌توان با ارزش درمعرض‌ریسک عملیاتی[۲] کمّی کرد؛ وقتی با ریسک نقدینگی سر و کار داریم، نقدینگی درمعرض‌ریسک[۳] را می‌توان به‌عنوان سنجهٔ ریسک معرفی کرد؛ جریان‌نقدی درمعرض‌ریسک[۴] سنجه‌ای برای اندازه‌گیری عدم‌اطمینان موجود در جریان‌های نقدی است؛ نگرانی‌های مربوط به درآمدهای مؤسسه را می‌توان با استفاده از درآمد درمعرض‌ریسک[۵] کمّی کرد. به همین ترتیب، عدم‌اطمینان موجود در هر متغیری را می‌توان با استفاده از سنجهٔ ارزش درمعرض‌ریسک اندازه‌گیری نمود. تعریف سنجهٔ ارزش درمعرض‌ریسک برای اندازه‌گیری انواع ریسک‌ها بدون تغییر است، اما هر ریسکی بسته به ویژگی‌هایی که دارد، چالش‌های جدیدی را برای برآوردن این تعریف پیش روی قرار می‌دهد.

اهمیت ارزش درمعرض‌ریسک

تمرکز ما بر ارزش درمعرض‌ریسک به‌علت توجه غیرقابل انکار محققان، تحلیل‌گران، سرمایه‌گذاران، مؤسسات مالی، نهادهای نظارتی و دیگر فعالان موجود در بازار به این سنجه می‌باشد. دیگر کمتر کتابی را در زمینهٔ اندازه‌گیری و مدیریت ریسک می‌توان یافت که از این سنجه به‌عنوان ابزاری مهم در مدیریت ریسک نام نبرده و یا لااقل از مفهوم آن جهت کمّی‌سازی ریسک استفاده نکرده باشد.

در این کتاب، ما از ارزش درمعرض‌ریسک برای اندازه‌گیری ریسک بازار استفاده می‌کنیم، ولی وسعت کاربرد این سنجه چنان است که راه خود را برای کمّی‌سازی انواع

---

1. credit value at risk (CVaR)
2. operational value at risk (OVaR)
3. liquidity at risk (LaR)
4. cash flow at risk (CFaR)
5. income at risk (IaR)

دیگر ریسک‌ها نیز باز کرده است. به‌طور خلاصه می‌توان گفت که عوامل زیر باعث افزایش اهمیت ارزش درمعرض‌ریسک شده است:

- توصیهٔ کمیتهٔ بال بـه بانک‌هـا در جهـت اسـتفاده از ارزش درمعرض‌ریسـک بـرای سنجش ریسک با هدف تعیین میزان ذخیرهٔ سرمایهٔ لازم برای پوشش ریسک.
- الزامات قانونی از جانب مقامات ناظر بر بازار سرمایه و از جمله کمیسیون بورس اوراق بهادار[1] آمریکا به تهیهٔ اطلاعات کمّی ریسک بازار از طریـق ارزش درمعرض‌ریسـک به‌عنوان یکی از گزینه‌های افشا.
- زیان‌های بی‌شمار و قابل‌ملاحظه درنتیجهٔ کاستی رویه‌های مدیریت ریسک و ناکامی در کشـف اشـتباهات در قیمت‌گـذاری اوراق مشـتقه (نات‌وسـت و یـواس‌بی[2])، در نظرگرفتن ریسک اضافی (پراکتراندگمبل و اورنج‌کـانتی[3])، و کلاه‌بـرداری (بـارینگز و سامیتومو[4]).
- ویژگی‌ها و مزیت‌های ارزش درمعرض‌ریسک نسبت به سایر سنجه‌های ریسک.

مورد اخیر به تفصیل در فصل بعدی بررسی می‌شود.

خلاصهٔ فصل

این فصل را با تعریف ریسک و مدیریت ریسک آغاز کردیم و سپس به تعریـف انـواع ریسک‌های تجاری و غیرتجاری پرداختیم. در ادامه، چهار ریسک مهم حاکم بر فعالیت‌های مؤسسات مالی یعنی ریسک بازار، اعتباری، نقدینگی و عملیاتی مورد بررسـی قـرار گرفـت. سپس، یک گروه‌بندی کلی از سنجه‌های ریسک تحت عناوین سنجه‌های حساسیت، تلاطم و سنجه‌های ریسک نامطلوب ارایه کردیم و سنجه‌های موجود در هرکدام از این گروه‌ها را مختصراً تشریح نمودیم. سپس، جایگاه ارزش درمعرض‌ریسک را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از

1. Security Exchange Commission (SEC)
2. NatWest and USB
3. Proctor & Gamble and Orange County
4. Barings and Sumitomo

سنجه‌های ریسک نامطلوب و به‌طور مشخص‌تر، زیرمجموعه‌ای از سنجه‌های ریسک مبتنی بر صدک مشخص کردیم. در ادامهٔ فصل، ضمن توضیح عمومیت استفاده از ارزش درمعرض‌ریسک، تداول استفاده از آن را در سنجش انواع ریسک مورد تأکید قرار دادیم. در نهایت، با ارایهٔ شواهدی مبنی بر استفادهٔ روزافزون از این سنجه برای اندازه‌گیری ریسک بازار و سایر ریسک‌ها، مطالب این فصل را خاتمه دادیم.

منابع

۱. بابک لطفعلی‌ای (۱۳۸۵)، پایان‌نامه: *استفاده از معیار ارزش درمعرض‌خطر برای محاسبهٔ ریسک سبد سهامی بانک صنعت و معدن، شرکت‌های زیر مجموعه و شرکت‌های عضو بورس اوراق بهادار تهران*، دانشکدهٔ مدیریت و اقتصاد دانشگاه صنعتی شریف، استاد راهنما: دکتر احمد شربت اوغلی.

۲. دکتر رضا راعی و علی سعیدی (۱۳۸۳)، *مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک*، انتشارات سمت.

۳. محمد اقبال‌نیا (۱۳۸۴)، پایان‌نامه: *طراحی مدلی برای مدیریت ریسک سرمایه‌گذاری در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از مفهوم ارزش درمعرض خطر*، دانشکدهٔ مدیریت و حسابداری دانشگاه شهید بهشتی، استاد راهنما: دکتر محمد اسماعیل فدایی‌نژاد.

۴. مؤسسهٔ عالی بانکداری ایران (۱۳۸۵)، *معرفی مفهوم ارزش درمعرض‌خطر و کاربرد آن در اندازه‌گیری ریسک بانک*.

5. Alexander, G. J., Baptisa, A. M. (2002), "Economic implication of using mean-VaR model for portfolio selection," *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 26, No. 7, pp. 1159-1193.
6. Bamoul, W. J. (1963), "An expected-gain confidence limit criterion for portfolio selection," *Journal of Management Science*, Vol. 10, No. 1, pp.174-182.
7. Basel II: *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework*, (June 2004).

8. Benniga, S. (2001), *Financial Modeling Using Excel and VBA*, MIT Press, Second Edition.
9. Campbell, R., Huisman, R., and Koedijk, K. (2001), "Optimal portfolio selection in a VaR framework," *Journal of Banking and Finance*, Vol. 25, No. 9, pp. 1789-1804.
10. Fama, E. F. (1963), "Mandelbrot and the stable paretian hypothesis," *Jornal of Business*, Vol. 36, No. 4, pp. 420-429.
11. Guldimann, T. (2000), "The story of RiskMetrics**,"** *Risk13*, (January), pp.56-58.
12. Holton, G. A. (2004), *Value-at-Risk: Theory and Practice*, Academic Press.
13. Jorion, P. (2000), *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk***,** McGraw-Hill Professional, Second Edition.
14. Kevin Dowd (2005), *Measuring Market Risk*, John Wiley & Sons Ltd, Second Edition.
15. Lan-Chih, H., Burridge, P., Cadle, J. and Theobald, M. (2000), "Value at risk: Applying extreme approach to Asian markets in the recent financial turmoil," *Pacific Basin Finance Journal*, Vol. 8, No. 2, pp. 249-275.
16. Mandelbrot, B. (1963), "The variation of certain speculative prices," *The Journal of Business***,** Vol. 36, No.4, pp. 394-419.
17. Moosa, I. A. and Bollen, B. (2002), "A benchmark for measuring bias in estimated daily value at risk," *International Review of Financial Analysis*, Vol. 11, No, 1, pp. 85-100.
18. Roy, A. D. (1952), " Safety First and the Holding of Assets," *Econometrica*, Vol. 20, No. 3, pp. 11-17.
19. Telser, L. G. (1955), "Safety-First and Hedging," *Review of Economic Studies*, Vol. 23, pp.1-16.

فصل دوم

ارزش درمعرض‌ریسک

مقدمه

در این فصل به بررسی ارزش درمعرض‌ریسک به‌عنوان سنجهٔ ریسک بازار می‌پردازیم. ارزش درمعرض‌ریسک پیش از آن‌که سنجهٔ ریسک باشد، یک مفهوم است و دقیقاً به همین دلیل، رویکردها و روش‌های متعددی برای محاسبه و اندازه‌گیری آن توسعه یافته است. در هرکدام از این رویکردها و روش‌ها سعی بر این است تا به‌نوعی این مفهوم برآورده شود. در این فصل ابتدا به تعریف ارزش درمعرض‌ریسک می‌پردازیم و پس از ارایهٔ فرآیند محاسبهٔ آن، محاسن و معایب این سنجه را تشریح می‌کنیم. در فصل‌های بعدی، پس از بررسی فرآیند مدل‌سازی ریسک و آشنایی با مفاهیم و ابزارهای مورد نیاز، به رویکردها و مدل‌های محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک می‌پردازیم.

تعریف

ارزش درمعرض‌ریسک، حداکثر زیانی است که کاهش ارزش سبد دارایی برای دورهٔ معینی در آینده، با ضریب اطمینان مشخصی، از آن بیشتر نمی‌شود. به عبارتی دیگر، VaR بدترین زیان موردانتظار را تحت شرایط عادی بازار و طی یک دورهٔ زمانی مشخص و در سطح اطمینان معین اندازه می‌گیرد. VaR به این سؤال پاسخ می‌دهد که با x درصد احتمال و طی افق زمانی تعیین‌شده، حداکثر چه میزان از ارزش دارایی یا سبد دارایی‌ها در

معرض ریسک قرار دارد. برای مثال، ارزش درمعرض‌ریسک در سطح اطمینان ۹۹ درصد برای بازهٔ زمانی ۱۰روزه، گویای این است که حداکثر زیان موردانتظار طی ۱۰ روز بعدی تنها یک بار در هر صد نمونه از مقدار ارزش درمعرض‌ریسک فراتر می‌رود. به بیانی دیگر می‌توان گفت که VaR کاهش در ارزش بازار دارایی یا سبد دارایی است که می‌توان انتظار داشت طی یک فاصلهٔ زمانی معین و با یک احتمال خاص، از عدد معینی فراتر نمی‌رود.

تصور کنید ارزش روز سبدی از اوراق بهادار برابر ۱۰۰ میلیون تومان است و با ضریب اطمینان ۹۵٪ مطمئنیم که حداکثر کاهش ارزش این سبد طی هفتهٔ آینده ۶۰ میلیون تومان است. بدین ترتیب، ارزش درمعرض‌ریسک این سبد دارایی برای هفتهٔ آینده و در سطح اطمینان ۹۵ درصد، ۶۰ میلیون تومان پیش‌بینی می‌شود. به عبارتی ساده‌تر، از ۱۰۰ میلیون تومان ارزش سبد دارایی، به احتمال ۹۵ درصد، حداکثر ۶۰ میلیون تومان آن در معرض ریسک قرار دارد. یعنی، می‌توان گفت که در سطح اطمینان ۹۵٪، ارزش سبد اوراق بهادار در دورهٔ آتی (هفتهٔ آینده) از ۴۰ میلیون تومان کمتر نمی‌شود. البته، بر اساس اهداف مدیریت ریسک و ویژگی‌های سبد دارایی می‌توان دوره‌های بزرگ‌تر و یا کوچک‌تری را انتخاب کرد و حداکثر زیان سبد دارایی را در دورهٔ موردنظر بررسی نمود.

از نظر ریاضی می‌توان ارزش درمعرض‌ریسک را به‌صورت زیر نشان داد:

$$\Pr\{p_0 - P_1 \geq VaR\} \leq \alpha \quad (۱-۲)$$

و یا

$$\Pr\{P_1 - p_0 \leq -VaR\} \leq \alpha \quad (۲-۲)$$

که p_0 ارزش سبد دارایی در زمان صفر و P_1 ارزش سبد در زمان ۱ می‌باشد. α نیز سطح خطای آماری است. رابطهٔ فوق بیان می‌کند که احتمال این‌که کاهش ارزش سبد دارایی در دورهٔ آتی، بیش از ارزش درمعرض‌ریسک باشد، حداکثر برابر α است. به عبارتی دیگر، احتمال این‌که زیان سبد دارایی در دورهٔ آتی کمتر از ارزش درمعرض‌ریسک باشد، $1-\alpha$ است. اگر تابع توزیع تجمعی[1] ارزش سبد دارایی در دورهٔ آتی را با $F(P)$ نشان

1. cumulative distribution function (CDF)

دهیم، معکوس آن یعنی $F_P^{-1}(\alpha)$ نشـان‌دهندهٔ صـدک‌های ارزش سـبد دارایـی در دورهٔ پیش روی است. بدین ترتیب، ارزش درمعرض‌ریسک سبد دارایـی از طریـق رابطـهٔ (۲-۳) به‌دست می‌آید.

$$VaR = p_0 - F_P^{-1}(\alpha) \quad (۳-۲)$$

که $F_P^{-1}(\alpha)$ صدک آلفای[1] توزیع ارزش سبد دارایی می‌باشد.

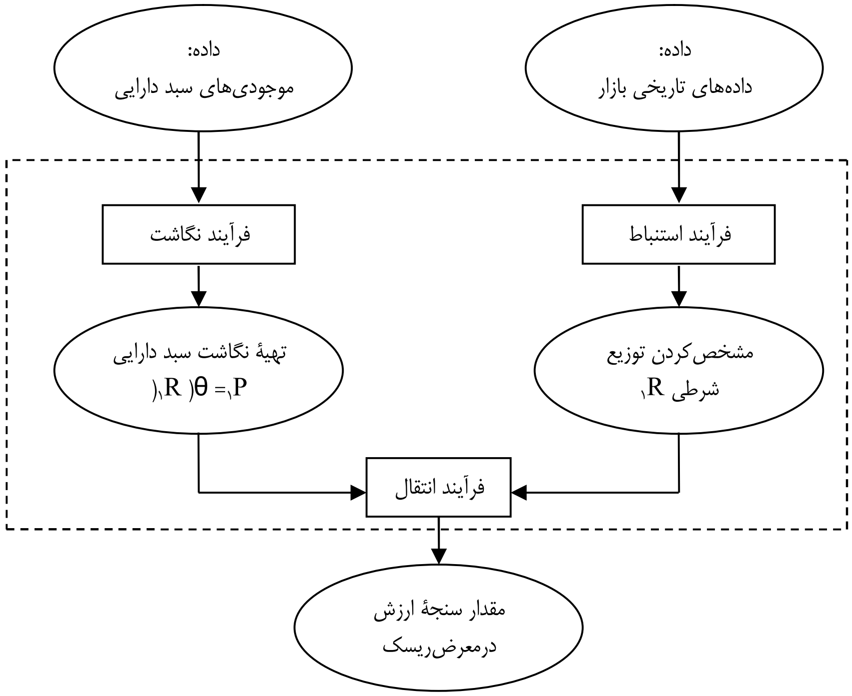
فرآیند محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک

این فرآیند شامل مجموعه گام‌های لازم برای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسـک اسـت. درک کامـل ایـن فرآینـد بسـیار مهـم اسـت، چراکـه منعکس‌کننـدهٔ مفهـوم ارزش درمعرض‌ریسک است و اهداف و ویژگی‌های آن را بدون اعمـال ساده‌سـازی‌های اضـافی، ارایه می‌نماید. محصول اولیهٔ این فرآیند، تخمین توزیع احتمال ارزش سبد دارایی برای دورهٔ آتی است. سپس، با استفاده از این توزیع احتمال، ارزش درمعرض‌ریسک محاسبه می‌شود.

بنابراین، برای این‌که بتوانیم ریسک بازار سبد دارایی را برآورد کنیم، به تخمین توزیـع احتمال ارزش سبد دارایی برای دورهٔ پیش‌بینی یا دورهٔ نگهداری مـوردنظر نیازمنـدیم. ایـن توزیع احتمـال می‌توانـد از توزیع‌هـای شناخته‌شـدهٔ آمـاری باشـد و یـا صـرفاً دربرگیرنـدهٔ ارزش‌های مختلف سبد دارایی و احتمال تخمینی رخداد آن‌هـا در دورهٔ آتـی باشـد و هـیچ توزیع مشخص آماری را به ذهن متبـادر نکنـد. مفهـوم ارزش درمعرض‌ریسـک بـا توزیـع احتمـال ارزش سـبد دارایـی گـره خـورده اسـت، بـه‌طوری کـه فرآینـد محاسـبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک بازار برای سبد دارایی معادل فرآینـد تخمـین توزیـع احتمـال ارزش سـبد دارایی در دورهٔ آتی است.

در ادامه با تشریح فرآیند محاسبهٔ VaR، به عمق مفهوم ارزش درمعرض‌ریسک بازار[1] پی می‌بریم. این فرآیند، در واقع فرآیند تخمین توزیع احتمال ارزش سبد دارایی در دورهٔ آتی است. به نمودار صفحهٔ بعد توجه کنید:

1. α-quantile



نمودار (۲-۱): فرآیند محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک

در این نمودار، گام‌های محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک بازار ارایه شده است. کادر نقطه‌چین شامل فرآیندهایی است که ورودی‌ها را به مقدار ارزش درمعرض‌ریسک تبدیل می‌کند. فرآیند محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک شامل چهار گام است که در ادامه به تشریح هریک از آن‌ها می‌پردازیم.

گام اول: تعیین درون‌دادها

گام اول، استخراج داده‌های مورد نیاز برای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک می‌باشد. این گام شامل دو مرحله است. در یکی از مراحل داده‌های سبد دارایی و در مرحلهٔ دیگر

1. market value at risk (MVaR)

داده‌های بازار فراهم می‌شود. هیچ‌کدام از این مراحل بر دیگری تقدم ندارد و مستقل از یکدیگرند.

مرحلهٔ اول: تعیین موجودی‌های سبد دارایی[1]

مرحلهٔ اول شامل استخراج موجودی‌های سبد دارایی است. موجودی‌های سبد دارایی شامل تعداد واحدهای هرکدام از دارایی‌های موجود در سبد دارایی است. سبد دارایی مورد بررسی ممکن است شامل سهام، اوراق قرضه، اختیارمعامله، پیمان آتی و یا حتی دارایی‌های غیرمالی مانند فلزات گران‌قیمت، املاک، مستغلات و غیره باشد. ما در این‌جا بردار موجودی‌های سبد دارایی را با $\boldsymbol{\omega}$ نشان می‌دهیم. این بردار یک بردار سطری است. بنابراین، اگر سبد دارایی ما شامل ۱۰۰ واحد از دارایی الف و ۵۰ واحد از دارایی ب باشد، $\boldsymbol{\omega}$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\boldsymbol{\omega} = (100 \quad 50)$$

مرحلهٔ دوم: شناسایی عوامل ریسک[2]

عامل ریسک، متغیری تصادفی است که طی فاصلهٔ زمانی $[0,1]$ مقداری به‌خود می‌گیرد و ارزش بازار سبد دارایی را در زمان ۱ متأثر می‌سازد. یک بردار ریسک[3] که با $\mathbf{Q}_1$ نمایش می‌دهیم، برداری تصادفی از عوامل ریسک در زمان ۱ است.

یک عامل ریسک خاص و دو بردار ریسک نقشی اساسی در محاسبهٔ VaR بازی می‌کنند. ما به آن‌ها اسامی و علامت‌های خاصی نسبت می‌دهیم. آن‌ها عبارتند از:

- P_1: ارزش آتی سبد دارایی (عامل ریسک)
- $\mathbf{S_1}$: بردار دارایی[4] (بردار ریسک)
- $\mathbf{R_1}$: بردار کلیدی[5] (بردار ریسک)

---

1. portfolio holdings
2. risk factors
3. risk vector
4. asset vector
5. key vector

ارزش آتی سبد دارایی (P_1) گویای ارزش بازار در زمان یک است. فرض می‌شود سبد دارایی در خلال دورهٔ $[0,1]$ ثابت است و هیچ خرید و فروشی بر روی آن انجام نمی‌شود. البته، این موضوع مانع خرید و فروش مدیران سبد دارایی نیست و تنها گویای این است که فرآیند یادشده، ریسک بازار سبد دارایی را بر اساس اجزای آن در زمان صفر به‌دست می‌دهد. ما ارزش بازار سبد دارایی را در زمان صفر با p_0 نشان می‌دهیم.

بردار دارایی ($\boldsymbol{S_1}$)، برداری است که اعضای آن شامل ارزش دارایی‌های تشکیل‌دهندهٔ سبد دارایی در زمان یک است.

همان‌گونه که بعداً خواهیم گفت، برای استخراج توزیع ارزش سبد دارایی، ابتدا باید مستقیماً یک توزیع احتمال شرطی[1] را برای یک بردار عوامل ریسک (مانند نرخ ارز و نرخ بهرهٔ کوتاه‌مدت) مشخص نمود. به این عوامل ریسک، عوامل کلیدی[2] می‌گویند. در واقع این عوامل، عناصر بردار کلیدی ($\mathbf{R_1}$) است. گاهی اوقات ارزش دارایی‌ها را به‌عنوان عوامل کلیدی درنظر می‌گیریم.

حال که با عوامل ریسک آشنا شدیم، به تشریح نحوهٔ شناسایی آن‌ها می‌پردازیم. در این مرحله برای ارایهٔ برآوردی از توزیع احتمال ارزش آتی سبد دارایی، باید عوامل ایجادکنندهٔ تلاطم در ارزش را شناسایی کنیم. این عوامل همان عوامل ریسک است. عموماً فاکتورهای محرک قیمت اوراق بهادار عبارتند از: قیمت سهام، نرخ مبادلهٔ ارز، قیمت کالاها و نرخ‌های بهره. می‌توانیم این عوامل را از طریق مطالعهٔ نظریه‌های اقتصادی و مالی شناسایی کنیم. مدل تک‌شاخصی[3]، شاخص سهام بورس اوراق بهادار را به‌عنوان عامل ایجاد تلاطم در ارزش دارایی‌ها معرفی می‌کند. در شکل پیچیده‌تر مدل‌های عاملی[4]، از چندین عامل ریسک به‌عنوان عوامل ایجاد تلاطم در ارزش دارایی‌های مالی یاد می‌شود. این عوامل ممکن است بر اساس ویژگی‌های سبد دارایی‌ها متنوع باشد، اما برخی از مهم‌ترین آن‌ها شامل شاخص صنعت، نرخ بهره، نرخ تورم، تولید ناخالص داخلی و حتی قیمت کالاهای استراتژیک مثل طلا و نفت است. نظریهٔ قیمت‌گذاری آربیتراژ[5] نیز به شکل

1. conditional probability distribution
2. key factors
3. single index model
4. factor models
5. arbitrage pricing theory (APT)

مشابهی عمل می‌کند، اما در این نظریه، عوامل ریسک معرفی نمی‌شود و شناسـایی آن‌هـا به‌عهدهٔ کاربران گذاشته می‌شود.

گام دوم: فرآیند نگاشت[1] و فرآیند استنباط[2]

این گام نیز شامل دو مرحله است. در یکی از مراحل مبادرت به پیاده‌سازی فرآیند نگاشت می‌کنیم و در مرحلهٔ بعد به فرآیند استنباط روی می‌آوریم. در این‌جا برخلاف مراحل گام اول که نسبت به هم تقدم و تأخری ندارند، ابتدا فرآیند نگاشت را به پایان می‌رسانیم و سپس به سراغ فرآیند استنباط می‌رویم.

مرحلهٔ اول: فرآیند نگاشت

در ریاضیات، نگاشت مترادف تابع است. در زمینهٔ ارزش درمعرض‌ریسک، منظور از نگاشت، توابعی است که بردارهای خاص ریسک را به یکدیگر ارتباط می‌دهد. اگر $\mathbf{Q_1}$ و $\dot{\mathbf{Q}}_1$ بردارهای ریسک در زمان یک باشد، تابع نگاشت به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{Q_1} = \varphi(\dot{\mathbf{Q}}_1) \qquad (۴-۲)$$

ما φ را تابع نگاشت[3] می‌نامیم. نگاشت سبد دارایی[4] آن نگاشتی است که ارزش یک سبد دارایی را به‌صورت تابعی از یک بردار ریسک مثل $\mathbf{Q_1}$ تعریف می‌کند.

$$P_1 = \varphi(\mathbf{Q_1}) \qquad (۵-۲)$$

نگاشت‌های سبد دارایی نقشی ساده ولی غیرقابل‌اجتناب در استخراج توزیع احتمال ارزش سبد دارایی بازی می‌کند. همان‌طور که گفتیم، P_1 را به‌عنوان ارزش بازار سبد دارایی در زمان یک تعبیر می‌کنیم. از نظر ریاضی تعریف P_1 از دو راه برایمان امکان‌پذیر است:

۱. می‌توانیم مستقیماً یک توزیع شرطی برای P_1 مشخص کنیم.
۲. می‌توانیم P_1 را به‌عنوان تابعی از یک بردار تصادفی تعریف کنیم.

---

1. mapping process
2. inference process
3. mapping function
4. portfolio mapping

روش اول به‌سختی قابل‌توجیه است. سبد دارایی‌ها و بازارها عموماً از پیچیدگی بالایی برخوردارند. بنابراین، تعیین مستقیم یک توزیع شرطی برای P_1 مشکل است. به ناچار P_1 را بر اساس راه دوم تعیین می‌کنیم که به نگاشت سبد دارایی می‌انجامد.

$$P_1 = \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{S_1} \qquad (۶-۲)$$

مطابق آن‌چه گفته شد، $\mathbf{S_1}$ را به‌عنوان بردار دارایی تعریف می‌کنیم. برای تکمیل تعریف P_1 باید $\mathbf{S_1}$ را به‌لحاظ ریاضی تعریف کنیم. همانند P_1 دو راه برای تعریف $\mathbf{S_1}$ داریم:

۱. می‌توانیم مستقیماً یک توزیع شرطی برای $\mathbf{S_1}$ مشخص کنیم.
۲. می‌توانیم $\mathbf{S_1}$ را به‌عنوان تابعی از یک بردار تصادفی تعریف کنیم.

استفاده از هر دو راه امکان‌پذیر است. می‌توانیم همین جا متوقف نشویم و به جای تعریف مستقیم یک توزیع مشترک[1] برای $\mathbf{S_1}$، آن را به‌صورت نگاشتی از بردار تصادفی دیگری $(\mathbf{R_1})$ تعریف کنیم. در صورت استفاده از روش دوم داریم:

$$\mathbf{S_1} = \varphi(\mathbf{R_1}) \qquad (۷-۲)$$

بدون توجه به این‌که چند نگاشت صورت می‌گیرد، نهایتاً P_1 باید به‌عنوان تابعی از یک بردار تصادفی تعریف شود که مستقیماً توزیع مشترک آن را تعیین می‌کنیم. این بردار تصادفی، بردار کلیدی $\mathbf{R_1}$ است. رابطهٔ زیر، تابع نگاشتی را نشان می‌دهد که P_1 را توسط θ به بردار کلیدی‌اش مربوط می‌سازد.

$$P_1 = \theta(\mathbf{R_1}) \qquad (۸-۲)$$

این رابطه، نگاشت سبد دارایی است و در نمودار صفحهٔ بعد به‌صورت شماتیک نشان داده شده است.

---

1. joint distribution

$$\mathbf{R}_1 \overbrace{\xrightarrow{\varphi} \mathbf{S}_1 \xrightarrow{\boldsymbol{\omega}}}^{\theta} P_1$$

نمودار (۲-۲): نگاشت سبد دارایی

اگر ارزش دارایی‌ها به‌عنوان عوامل کلیدی مورد استفاده قرار گیرد، نقش دوگانه‌ای هم به‌عنوان بردار دارایی و هم به‌عنوان بردار کلیدی بازی می‌کند. در این‌صورت:

$$P_1 = \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{S}_1$$

که همان رابطهٔ (۲-۶) است.

در این‌جا نه تنها نگاشت‌های سبد دارایی، بلکه رویهٔ کلی ساخت آن‌ها را نیز تشریح کردیم. مطابق آن‌چه گفتیم، نگاشت‌های سبد دارایی با بردار دارایی ($\mathbf{S}_1$) و بردار موجودی‌ها ($\boldsymbol{\omega}$) آغاز می‌شود و در ادامه ممکن است بر اساس بردار کلیدی $\mathbf{R}_1$ نگاشتی از $\mathbf{S}_1$ به‌عمل بیاید.

مرحلهٔ دوم: فرآیند استنباط

بعد از تکمیل فرآیند نگاشت، فرآیند استنباط را در پیش می‌گیریم. به خاطر داریم که در مرحلهٔ دوم از گام اول، به شناسایی عوامل ریسک پرداختیم. در فرآیند نگاشت، برخی از این عوامل در بردار کلیدی ریسک یعنی $\mathbf{R}_1$ ظاهر می‌شود. علامت ۱ نشانگر مقدار عامل ریسک در زمان یک است. از آنجا که این عوامل متغیرهای قابل‌مشاهدهٔ مالی‌اند، برای آن‌ها باید داده‌های تاریخی موجود باشد. هدف از فرآیند استنباط، مشخص‌نمودن توزیع عوامل کلیدی ریسک مشروط بر اطلاعات موجود در زمان صفر است. به‌بیانی دیگر طی رویهٔ استنباط، یک توزیع شرطی برای $\mathbf{R}_1$ مشخص می‌کنیم و ممکن است این کار را از طریق انحراف‌معیارها و همبستگی‌های عناصر $\mathbf{R}_1$ و یا از طرق دیگری انجام دهیم. مثلاً، اگر بردار عوامل کلیدی ریسک شامل نرخ بهرهٔ کوتاه‌مدت و تغییرات قیمت طلا باشد، در فرآیند استنباط باید توزیع مشترک این دو متغیر را بر اساس اطلاعات تاریخی موجود، استخراج کنیم.

فرآیند استنباط به شکل‌های مختلفی انجام می‌گیرد. این فرآیند حتی می‌تواند شامل فرضی ساده در مورد توزیع مشترک عوامل کلیدی ریسک باشد. در عمل برای دستیابی به یک توزیع منطقی، تحلیل سری زمانی به‌همراه نظریه‌های مالی به‌کار گرفته می‌شود.

گام سوم: فرآیند انتقال[1]

به یاد داریم که هدف نهایی ما از طی فرآیندهای نمودار (۲-۱) دستیابی به توزیع احتمال ارزش سبد دارایی در دورهٔ آتی است. اکنون بهتر است مروری بر کیفیت تحقق این هدف داشته باشیم:

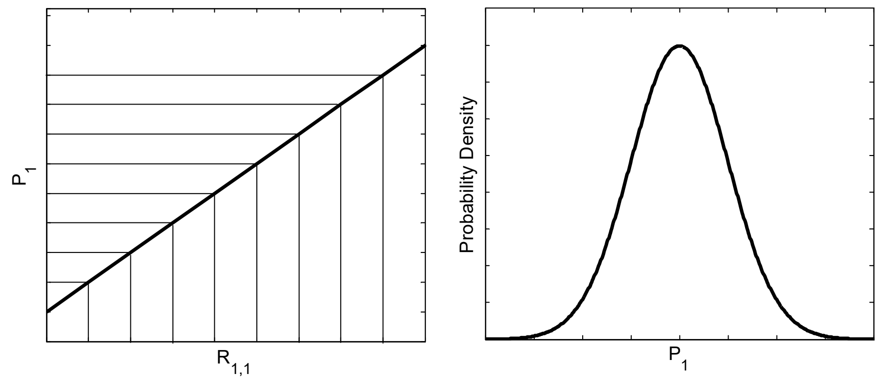
فرآیند نگاشت، نحوهٔ تأثیرپذیری سبد دارایی از عوامل کلیدی ریسک را مد نظر قرار می‌دهد و فرآیند استنباط با نحوهٔ تعیین توزیع این عوامل کلیدی سروکار دارد. بدیهی است نگاشت سبد دارایی به خودی‌خود نمی‌تواند بگوید که سبد دارایی چقدر ریسکی است، چراکه حاوی هیچ‌گونه اطلاعاتی راجع به تلاطم بازار نیست و این بدان معناست که به‌تنهایی نمی‌تواند از شکل توزیع ارزش سبد دارایی خبر دهد. مشخصات توزیع مشترک عوامل کلیدی ریسک هم به خودی‌خود برای انجام این‌کار کافی نیست. از آن‌جاکه این توزیع به‌خودی‌خود مستقل از ترکیب سبد دارایی است، در مورد ریسک سبد چیزی برای گفتن ندارد. بنابراین، تا این‌جا به توزیع ارزش سبد دارایی دست نیافته‌ایم، ولی می‌دانیم که نگاشت سبد دارایی و توزیع مشترک عوامل کلیدی ریسک هرکدام قسمتی از جورچین ما را تکمیل می‌کنند. فرآیند انتقال با برقراری پل ارتباطی بین این دو تکه از جورچین، به بازی خاتمه می‌دهد.

در فرآیند انتقال باید به‌نوعی اطلاعات بازار موجود در ویژگی‌های توزیع $\mathbf{R}_1$ را از طریق اطلاعات موجود در نگاشت سبد دارایی پالایش کنیم. در واقع با طی این فرآیند، توزیع مشترک عوامل ریسک را در قالب تابع نگاشت سبد دارایی به‌دست می‌آوریم و بدین ترتیب به برآوردی از توزیع احتمال ارزش سبد دارایی در زمان یک (دورهٔ آتی) دست می‌یابیم. به بیانی ساده‌تر، با طی این فرآیند، توزیع شرطی P_1 را مشخص می‌کنیم. برای درک بیشتر این فرآیند دو مثال ساده ارایه می‌کنیم:

---

1. transformation process

فرض کنید ارزش یک سبد دارایی به یک عامل کلیـدی ($R_{1,1}$) بسـتگی دارد. توجـه داشته باشید که اندیس اول به‌معنی شمارهٔ عامل کلیدی و انـدیس دوم بـه‌معنی زمـان آن می‌باشد. توزیع این عامل کلیدی را نرمال در نظر بگیرید. هم‌چنین فـرض کنیـد کـه تـابع نگاشت (θ)، یک چندجمله‌ای خطی است. این وضعیت در نمودارهای زیر نشان داده شـده است.

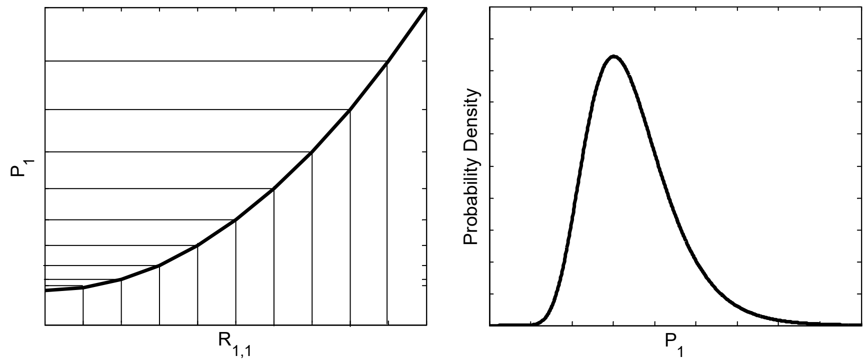


نمودار (۲-۳): فرآیند انتقال برای تابع نگاشت خطی

نمودار سمت چپ نمایانگر تابع نگاشت (θ) است. در این نمودار مقادیری با فواصـلی هم‌اندازه از $R_{1,1}$ انتخاب شده و مقادیر متناظر در P_1 به‌دست آمده است. مشخص است که مقادیر حاصل در P_1 نیز دارای فواصلی هم‌اندازه است و ایـن بـدان معنـی اسـت کـه θ هیچ‌گونه اعوجاجی[1] ایجاد نمی‌کند. از آنجا که توزیع $R_{1,1}$ نرمـال شـرطی اسـت، P_1 نیـز همان‌گونه که در نمودار سمت راست مشخص است، دارای توزیع نرمال شرطی است.

در مثال دوم سبدی را درنظر بگیرید که شامل یـک اختیارخریـد اسـت. فـرض کنیـد دارایی تعهدشده تنها دارای یک عامل کلیدی یعنی $R_{1,1}$ می‌باشد. برای اجتنـاب از معرفـی عوامل کلیدی دیگر، نرخ‌های بهره و تلاطم ضمنی را ثابت درنظر بگیریـد. بـه نمودارهـای صفحهٔ بعد توجه کنید.

1. distortion



نمودار (۲-۴): فرآیند انتقال برای تابع نگاشت غیرخطی

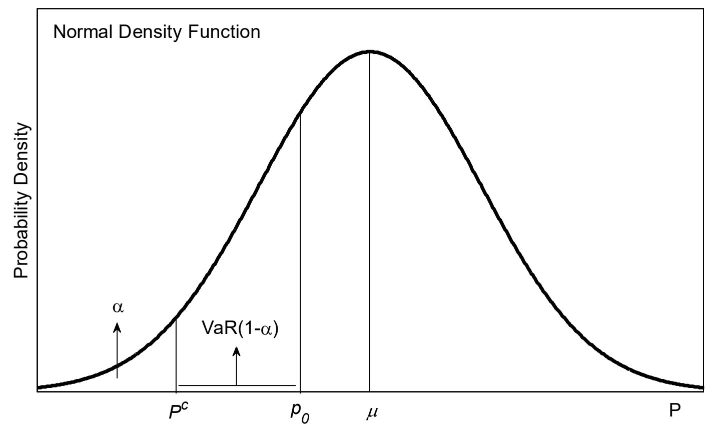
نمودار سمت چپ نمایان‌گر تابع نگاشت اختیارمعامله است که از رابطهٔ قیمت‌گذاری بلک-شولز اقتباس شده است. مقادیری با فواصلی هم‌اندازه در $R_{1,1}$ به مقادیری با فواصلی هم‌اندازه در P_1 منجر نمی‌شود. از آنجا که $R_{1,1}$ دارای توزیع نرمال شرطی است، P_1 دارای توزیع غیرنرمال شرطی است. نمودار سمت راست گویای این مسأله است.

وجه تسمیهٔ فرآیند انتقال بدین دلیل است که در خلال آن، ویژگی‌های توزیع عوامل کلیدی ریسک از مجرای تابع θ به ارزش سبد دارایی در زمان یک، منتقل می‌گردد. بدون اجرای فرآیند انتقال، بر اساس تابع θ و عوامل ریسک موجود در آن، تنها به مقدار موردانتظار ارزش آتی سبد دارایی دست می‌یابیم. فرآیند انتقال، با انتقال ویژگی‌های تابع توزیع مشترک عوامل ریسک به ارزش موردانتظار سبد دارایی، عدم‌اطمینان این مقدار موردانتظار را ارایه می‌کند. در این فرآیند جهت مشخص‌نمودن توزیع شرطی P_1، از نظریهٔ احتمال و نیز روش‌های انتگرال‌گیری عددی[1] از جمله روش مونت‌کارلو[2] استفاده می‌شود. تعیین مشخصات توزیع P_1 می‌تواند به شکل‌های مختلفی مانند تابع چگالی احتمال[3]، تابع مشخصات[4]، پارامترهای معینی از توزیع P_1، خلق نمونه‌ای از توزیع P_1 و غیره ظاهر شود.

1. numerical integration
2. Monte Carlo method
3. probability density function (PDF)
4. characteristic function

گام چهارم: محاسبهٔ مقدار سنجهٔ ارزش درمعرض‌ریسک

حاصل فرآیندهایی که تا به این‌جا تشریح شد، توزیع ارزش سبد دارایی‌هاست. با داشتن این توزیع، محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک کار چندان دشواری نیست. فرض کنید تابع توزیع ارزش سبد دارایی همانند نمودار زیر به‌دست آمده است.



نمودار (۲-۵): توزیع ارزش نرمال و ارزش درمعرض‌ریسک

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، صرفاً به‌خاطر راحتی انجام محاسبات، از توزیع نرمال برای نمایش توزیع ارزش آتی سبد دارایی استفاده شده است. در نظرگرفتن توزیع نرمال برای ارزش سبد، فرضی خاص تلقی می‌شود، چراکه فرآیند محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک هیچ توزیع خاصی را بر ارزش سبد دارایی تحمیل نمی‌کند. VaR در سطح اطمینان $1-\alpha$ و با فرض نرمال‌بودن توزیع ارزش سبد دارایی، از طریق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} &VaR = p_0 - F_P^{-1}(\alpha) = p_0 - P^C \\ &\xrightarrow{P\sim N(\mu,\sigma^2)} VaR = p_0 - (\mu - z_\alpha \sigma) \end{aligned} \quad (۹-۲)$$

که P^C ارزش بحرانی سبد دارایی، μ میانگین ارزش سبد دارایی، σ انحراف‌معیار ارزش سبد دارایی و z_α مقدار معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال‌استاندارد در سطح اطمینان $1-\alpha$ است. بدیهی است که هرگز به پارامترهای واقعی توزیع ارزش سبد دارایی دسترسی

نداریم، اما می‌توانیم آن‌ها را برآورد کنیم. این برآوردها $\bar{x}$ و s است که از آن‌ها به‌ترتیب جای μ و σ در رابطهٔ (۲-۹) استفاده می‌کنیم.

مؤلفه‌های ریسک[1]

نگرانی‌های ما راجع به آینده در دو حالت کاهش می‌یابد. اول این‌که بدانیم عوامل ریسک به چه صورتی حرکت می‌کنند و دوم این‌که بدانیم چه‌قدر در معرض خطرات ناشی از تحرکات عوامل ریسک قرار داریم. بنابراین، ریسک دارای دو مؤلفه است:

- عدم‌اطمینان[2]
- در معرض بودن[3]

فرض کنید لباس‌های شیک خود را پوشیده‌اید و از بابت بارش احتمالی باران نگرانید. بخشی از ریسک موجود در خیس‌شدن لباس‌هایتان به عدم‌اطمینان شما از وقوع بارندگی برمی‌گردد. بخش دیگری از ریسک به این امر مربوط می‌شود که آیا شما در فضای باز هستید و یا در مکانی مسقّف. به عبارتی دیگر، نمی‌دانید آیا باران می‌بارد یا نه و نیز نمی‌دانید آیا در معرض بارندگی قرار دارید یا خیر. اگر مطمئن باشید که باران نمی‌بارد، ریسک خیس‌شدن شما از بین می‌رود و نیز اگر در خانه باشید، ریزش باران بی‌اهمیت می‌گردد.

درک این دو مفهوم در فهم فرآیند محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک بسیار مؤثر است. به همین دلیل، مثال‌های بیشتری ارایه می‌کنیم.

تصور کنید از رودخانهٔ کم‌عمقی عبور می‌کنید که دارای کروکدیل است. خطر عبور از رودخانه را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد: شما در معرض خطر زخمی‌شدن سطحی، عمیق و یا حتی مرگ قرار دارید و نمی‌دانید که کدام‌یک از این حالات واقع خواهد شد. هم‌چنین از این‌که آیا مورد حملهٔ کروکدیل قرار می‌گیرید یا نه، دچار عدم‌اطمینان هستید.

---

1. risk components
2. uncertainty
3. exposure

اگر بدانید که کروکدیل به شما حمله نمی‌کند، ریسک شما تا حد صفر کاهش می‌یابد و نیز اگر بدانید که در معرض کدام‌یک از حالت‌ها یعنی زخمی‌شدن سطحی، زخمی‌شدن عمیق و یا مرگ قرار دارید باز هم ریسک کمتری متوجه شما خواهد بود.

نگرانی از وقوع زمین‌لرزه به دو قسمت قابل‌تقسیم است. اول این‌که آیا زلزله می‌آید یا خیر. دوم این‌که شما چقدر در معرض صدمات حاصل از آن مانند ریزش آوار قرار دارید. اگر از وقوع زمین‌لرزه خبر داشته باشید، نگرانی شما کاهش می‌یابد و اگر در مکانی امن مثل پناهگاه باشید، باز هم کمتر نگران زمین‌لرزه خواهید بود.

شاخص سهام یکی از عوامل تشریح‌کنندهٔ تلاطم‌های بازدهٔ سهام است، به‌طوری‌که مدل تک‌شاخصی از آن به‌عنوان تنها عامل مهم یاد می‌کند. حالا فرض کنید مدیر سبد دارایی شرکت سرمایه‌گذاری‌ای به این مدل اعتقاد دارد. او از تلاطم‌های شاخص سهام در روزهای آتی نامطلع بوده و احساس عدم‌اطمینان می‌کند. وی هم‌چنین از این جهت که سبد سهام شرکت چه میزان در معرض افت بازده (ناشی از تلاطم‌های شاخص سهام) قرار دارد، نامطمئن است.

خروجی فرآیندهای نگاشت و استنباط، منعکس‌کنندهٔ دو مؤلفهٔ ریسک است. تابع نگاشت (θ)، «در معرض بودن» را منعکس می‌کند. توزیع شرطی بردار کلیدی (${\boldsymbol{R}_1}$)، منعکس‌کنندهٔ عدم‌اطمینان است. بنابراین، عدم‌اطمینان در فرآیند استنباط ظاهر می‌گردد. فرآیند انتقال این دو مؤلفه را با هم ترکیب می‌کند تا به‌طریقی توزیع شرطی P_1 مشخص شود. سپس از مشخصات این توزیع برای تعیین مقدار سنجهٔ ارزش درمعرض‌ریسک استفاده می‌شود که در واقع خروجی نهایی نمودار (۲-۱) است.

در حیطهٔ ریسک اعتباری نیز به‌وضوح می‌توان دو مؤلفهٔ ریسک را در مدل‌های مربوطه مشاهده کرد. در این‌جا نیز احتمال[1] و اثر[2] رویدادهای اعتباری به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد. احتمال نکول[3] وام‌گیرنده نمایان‌گر عدم‌اطمینان و زیان مشروط بر نکول[4] نیز گویای «در معرض بودن» است.

1. probability
2. effect
3. probability of default (PD)
4. loss given default (LGD)

در ادبیات ریسک عملیاتی نیز مفاهیم مشابهی یافت می‌شود. جهت مدل‌سازی این ریسک در مؤسسات مالی عموماً این سؤال مطرح می‌شود که فراوانی و شدت[1] رویدادهای زیان‌بار[2] چقدر است. استخراج توزیع فراوانی و شدت رویدادهای زیان‌بار به‌ترتیب متناظر با فرآیند استنباط و فرآیند نگاشت در ریسک بازار است. توزیع فراوانی رویدادهای زیان‌بار منعکس‌کنندهٔ عدم‌اطمینان ما از وقوع آن‌هاست و توزیع شدت رویدادهای زیان‌بار نیز ناظر بر مقدار منابعی است که در معرض زیان قرار دارد. مثلاً، ریسک ناشی از اشتباه در انجام سفارشات خرید و فروش را در نظر بگیرید. فراوانی این حادثه زیان‌بار برای یک دورهٔ معین، همان عدم‌اطمینان است و زیان‌های مالی و اعتباری بالقوهٔ ناشی از این اشتباهات، همان «در معرض بودن» می‌باشد. در ادامهٔ فرآیند مدل‌سازی ریسک عملیاتی، جهت دستیابی به توزیع زیان[3]، توزیع فراوانی و شدت رویدادهای زیان‌بار را در هم می‌پیچند. این فرآیند متناظر با فرآیند انتقال در ریسک بازار است. در نهایت سنجهٔ ریسک موردنظر (مثلاً، ارزش درمعرض‌ریسک عملیاتی) بر اساس این توزیع استخراج می‌گردد.

در ادامه، برای درک بیشتر فرآیند محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک مثالی جامع ارایه می‌کنیم.

مثال (۲-۱): پیاده‌سازی فرآیند محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک

فرض کنید سبدی شامل ۱۰۰ عدد سهم یک، ۲۰۰ عدد سهم دو و ۳۰۰ عدد فروش قرضی[4] سهم سه می‌باشد. با این داده‌ها، مرحلهٔ اول از گام اول را کامل می‌کنیم. اعداد ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ همان موجودی‌های سبد دارایی در زمان صفر است. بنابراین، بردار سطری موجودی‌ها، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\boldsymbol{\omega} = (100 \;\; 200 \;\; -300)$$

همان‌گونه که در مرحلهٔ شناسایی عوامل ریسک گفتیم، ارزش آتی سبد دارایی، عامل ریسک است و نیز می‌دانیم که این ارزش تابعی از قیمت‌های آتی اوراق بهادار موجود در آن

1. severity
2. loss events
3. loss distribution
4. short sale

می‌باشد. یعنی قیمت‌های بازار اوراق بهادار موجود در سبد دارایی یا همان بردار دارایی به‌عنوان عامل تشریح‌کنندهٔ تلاطم‌های ارزش آن می‌باشد. بنابراین، قیمت بازار این سه ورق بهادار، سه عامل ریسک سبد دارایی ماست. تصور کنید که شما شاخص سهام را به‌عنوان مهم‌ترین عامل اثر گذار بر قیمت‌های بازار اوراق بهادار موجود در سبد دارایی خود می‌دانید. به این ترتیب مرحلهٔ دوم از گام اول را با شناسایی پنج عامل ریسک، یعنی ارزش آتی سبد دارایی، قیمت‌های بازار اوراق موجود در سبد دارایی و شاخص سهام پشت سر می‌گذاریم. بدیهی است که امکان معرفی تعداد بیشتری عامل ریسک وجود دارد ولی در این‌جا برای جلوگیری از پیچیدگی محاسبات به همین پنج عامل اکتفا می‌کنیم.

حالا نوبت به فرآیند نگاشت می‌رسد. مطابق توضیحات گذشته، نتیجه می‌گیریم که استخراج مستقیم توزیع ارزش سبد دارایی در زمان یک قابلیت توجیه ندارد. بنابراین، ارزش سبد دارایی را به‌عنوان تابعی از قیمت‌های اوراق بهادار موجود در آن مورد بررسی قرار می‌دهیم. طبق رابطهٔ (۲-۶) خواهیم داشت:

$$P_1 = \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{S}_1 \Rightarrow P_1 = (\mathit{100} \quad \mathit{200} \quad -\mathit{300})\,\mathbf{S}_1$$

بردار $\mathbf{S}_1$ شامل قیمت‌های اوراق بهادار در زمان ۱ است:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} S_{1,1} \\ S_{2,1} \\ S_{3,1} \end{pmatrix}$$

که $S_{i,1}$ قیمت دارایی i در زمان یک است. بنابراین خواهیم داشت:

$$P_1 = 100\,S_{1,1} + 200\,S_{2,1} - 300\,S_{3,1}$$

در این‌جا می‌توانیم فرآیند نگاشت را متوقف کنیم و یا قیمت‌های آتی اوراق بهادار را نیز به‌عنوان تابعی از عامل یا عوامل ریسک دیگری درنظر بگیریم. به‌خاطر داریم که در مرحلهٔ شناسایی عوامل ریسک، علاوه بر ارزش آتی سبد دارایی و قیمت اوراق بهادار، شاخص سهام را نیز به‌عنوان عامل ریسک معرفی کردیم. شاخص سهام در نظریه‌های مالی به‌عنوان یکی از عوامل مهم تشریح‌کنندهٔ بازدهٔ سهام معروف است. بدین ترتیب، برای

این‌که بتوانیم بازدهٔ سهام را به بازدهٔ شاخص سهام مرتبط کنیم، ابتدا قیمت‌های آتـی اوراق بهادار را به‌عنوان تابعی از بازدهٔ آتی سهام در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{S}_1 = \varphi(\mathbf{r}_1)$$

که $\mathbf{r_1}$ بردار بازدهٔ دارایی‌ها در زمان یک است:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{1,1} \\ r_{2,1} \\ r_{3,1} \end{pmatrix}$$

تابع نگاشت (φ) برداری از توابع اجزای آن یعنی φ_i است:

$$S_{i,1} = \varphi_i(\mathbf{r_1}) = s_{i,0}\exp(r_{i,1}) \Rightarrow \mathbf{S_1} = \begin{pmatrix} s_{1,0}\exp(r_{1,1}) \\ s_{2,0}\exp(r_{2,1}) \\ s_{3,0}\exp(r_{3,1}) \end{pmatrix}$$

که $s_{i,0}$ قیمت دارایی i در زمان صفر است.

فرض کنید قیمت کنـونی سـهم ۱، ۲ و ۳ بـه‌ترتیب ۲۵۰، ۴۰۰ و ۱۵۰ تومـان اسـت. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{S_1} = \begin{pmatrix} 250\times\exp(r_{1,1}) \\ 400\times\exp(r_{2,1}) \\ 150\times\exp(r_{3,1}) \end{pmatrix}$$

اکنون بردار بازدهٔ سهام را به‌عنوان تابعی از شاخص سهام در نظر می‌گیریم.

$$\mathbf{r_1} = \dot{\varphi}(I_1)$$

که I_1 بازدهٔ شاخص سهام در زمان یک است. این رابطه یک تابع نگاشـت می‌باشـد، چراکه بردار بازدهٔ دارایی‌ها را به بردار تک‌عضـوی دیگـری یعنـی شـاخص سـهام مربـوط می‌سازد. اما، رابطهٔ این تابع چیست؟ برای پاسخ می‌توانیم به نظریه‌های مالی رجوع کنـیم.

بر اساس مدل تک‌شاخصی، رابطهٔ بین بازدهٔ قیمت سهام و شـاخص به‌صـورت زیـر شـکل می‌گیرد:

$$r_{i,1} = \alpha_i + \beta_i I_1 + \varepsilon_{i,1}$$

که α و β پارامترهای مدل تک‌شاخصی است. بر این اساس، خواهیم داشت:

$$\mathbf{r_1} = \begin{pmatrix} r_{1,1} \\ r_{2,1} \\ r_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 I_1 + \varepsilon_{1,1} \\ \alpha_2 + \beta_2 I_1 + \varepsilon_{2,1} \\ \alpha_3 + \beta_3 I_1 + \varepsilon_{3,1} \end{pmatrix}$$

اکنون می‌توان بین ارزش سبد و بازدهٔ شاخص سهام در زمان یک، رابطه برقرار کرد:

$$P_1 = \theta(I_1)$$

$$P_1 = (100 \quad 200 \quad -300) \begin{pmatrix} 250 \times \exp(\alpha_1 + \beta_1 I_1 + \varepsilon_{1,1}) \\ 400 \times \exp(\alpha_2 + \beta_2 I_1 + \varepsilon_{2,1}) \\ 150 \times \exp(\alpha_3 + \beta_3 I_1 + \varepsilon_{3,1}) \end{pmatrix}$$

این رابطه، قیمت آتی سبد دارایی را به‌صورت تابعی از بازدهٔ شاخص سهام نشان می‌دهد و بنابراین نمایان‌گر نگاشت سبد دارایی است. با این حساب، بردار عوامل کلیدی ریسک در این مثال تنها یک عضو دارد و آن نیز بازدهٔ شاخص سهام است. توجه داشته باشید با وجود این‌که پنج عامل ریسک را شناسایی کردیم، تنها یکی از آن‌ها در بردار عوامل کلیدی ریسک حضور یافت. در این‌جا مرحلهٔ نگاشت به پایان می‌رسد.

در فرآیند نگاشت، بازدهٔ شاخص سهام را به‌عنوان تنها عامل کلیدی ریسک معرفی کردیم. اکنون به بررسی توزیع بازدهٔ شاخص سهام می‌پردازیم و این شروع فرآیند استنباط را نوید می‌دهد. تصور کنید با بررسی داده‌های روزانهٔ مربوط به بازدهٔ شاخص سهام به این نتیجه می‌رسید که با تقریب خوبی از توزیع نرمال تبعیت می‌کند و توزیع نرمال به‌طور رضایت‌بخشی برازندهٔ آن است. هم‌چنین فرض کنید که میانگین و واریانس توزیع بازدهٔ شاخص به‌ترتیب، ۰/۰۱ و ۰/۰۰۵ به‌دست آمده است. بدین‌ترتیب مرحلهٔ استنباط به پایان می‌رسد. توجه کنید که در این‌جا تنها برای ساده‌سازی، توزیع نرمال را برازندهٔ داده‌هایمان فرض نمودیم و گرنه ممکن است در فرآیند استنباط به این نتیجه برسیم که توزیع دیگری در خور آن است. از طرف دیگر وجود تنها یک عامل کلیدی ریسک باعث تسهیل بیش از حد این فرآیند گردید. در عمل، افزایش تعداد عوامل کلیدی ریسک به‌طور فزاینده‌ای به پیچیدگی فرآیند استنباط می‌انجامد، چراکه استخراج توزیع مشترک بردار عوامل کلیدی ریسک مستلزم در نظر گرفتن همبستگی‌ها و روابط میان این عوامل است.

حال که توزیع بازدهٔ شاخص مشخص شد، جهت تکمیل تابع نگاشت سبد دارایی، اقدام به برآورد پارامترهای مدل تک‌شاخصی می‌کنیم. تخمین این پارامترها نیازمند سری بازدهٔ شاخص سهام و سری متناظر بازدهٔ دارایی‌هاست. روابط مشخصی برای برآورد این پارامترها وجود دارد که ما در این‌جا از ارایهٔ آن‌ها خودداری می‌کنیم. در عوض، فرض را بر این می‌گیریم که مقادیر تخمینی پارامترهای آلفا و بتا برای سه سهم موجود در سبد دارایی به‌شرح جدول زیر است:

دارایی / پارامتر	آلفا	بتا
سهم ۱	۰/۰۲	۱/۴
سهم ۲	−۰/۰۱	۱/۱
سهم ۳	۰/۰۳	۰/۸

بر این اساس، نگاشت سبد دارایی به شکل زیر درمی‌آید:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 25000 & 80000 & -45000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(0.02 + 1.4 \times I_1) \\ \exp(-0.01 + 1.1 \times I_1) \\ \exp(0.03 + 0.8 \times I_1) \end{pmatrix}$$

تنها متغیر تصادفی یا به عبارتی تنها عامل ریسک موجود در رابطهٔ فوق، I_1 است.

تا به این‌جا، گام‌های اول و دوم را پشت سر گذاشتیم و نتیجهٔ آن‌ها، نگاشت سبد دارایی است. علاوه بر این، توزیع احتمال تنها عامل ریسک این رابطه را نرمال در نظر گرفته و پارامترهای آن (میانگین و واریانس) را به‌ترتیب ۰/۰۱ و ۰/۰۰۵ برآورد کرده‌ایم. این داده‌ها به‌همراه پارامترهای تخمینی مدل تک‌شاخصی برای تعیین مشخصات توزیع P_1 کافی است و این رسالت بر دوش فرآیند انتقال است. در واقع فرآیند انتقال، توزیع عبارت سمت راست مساوی را در رابطهٔ نگاشت سبد دارایی تعیین می‌کند.

از آن‌جا که I_1 دارای توزیع نرمال است، هر ترکیب خطی از آن دارای توزیع نرمال است. این بدان معنی است که عبارت $\alpha + \beta I_1$ دارای توزیع نرمال است بنابراین، بردار

بازدهٔ سهام $(\mathbf{r_1})$ نیز دارای توزیع چندمتغیرهٔ نرمال[1] است. از طرف دیگر، $\mathbf{S_1}$ تابعی نمایی از این بازده‌های نرمال است و بنابراین دارای توزیع چندمتغیرهٔ لاگ‌نرمال[2] خواهد بود. از آن‌جا که حاصل‌ضرب هر عدد ثابتی در متغیر تصادفی لاگ‌نرمال، خود لاگ‌نرمال است، نتیجه می‌گیریم که P_1 دارای توزیع لاگ‌نرمال است و مقادیر ثابت مربوط به موجودی‌ها و قیمت‌های اوراق بهادار در زمان صفر، باعث انحراف از این نتیجه نخواهد شد.

بنابراین، به‌سادگی به این نتیجه می‌رسیم که توزیع P_1 مشروط بر اطلاعات موجود تا زمان صفر، لاگ‌نرمال است. اما، این تمام داستان نیست. ما تنها می‌دانیم که ارزش آتی سبد دارایی دارای چه توزیعی است، اما برای ترسیم این توزیع به مشخصات آن نیز نیازمندیم. به‌عبارتی ساده‌تر، باید بتوانیم برآوردی از پارامترهای توزیع ارزش سبد ارایه دهیم. توزیع لاگ‌نرمال مانند نرمال با دو پارامتر میانگین و واریانس به‌طور کامل مشخص می‌شود. هم‌اکنون به برآورد پارامترهای آن می‌پردازیم، اما قبل از آن، بررسی اجمالی توزیع لاگ‌نرمال ضروری به‌نظر می‌رسد. ادامهٔ شرح مثال (۲-۱) را به بعد از بررسی این توزیع موکول می‌کنیم.

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع لاگ‌نرمال باشد، لگاریتم طبیعی آن دارای توزیع نرمال است. متغیر لاگ‌نرمال را می‌توان با میانگین (m) و واریانس (s^2) مشخص نمود. هم‌چنین، می‌توانیم آن را با میانگین (μ) و واریانس (σ^2) توزیع نرمال مشخص کنیم. ما توزیع لاگ‌نرمال را به‌صورت $\Lambda(m,s^2)$ نمایش می‌دهیم، اما ارایهٔ تابع چگالی آن را بر اساس μ و σ^2 بسیار راحت‌تر است:

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{lox(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}{x\sigma\sqrt{2\pi}} & if \quad x\geq 0 \\ 0 & if \quad x<0\end{cases} \quad (۱۰-۲)$$

رابطهٔ میانگین و انحراف‌معیار توزیع لاگ‌نرمال بر اساس پارامترهای توزیع نرمال عبارت است از:

---

1. multivariate normal distribution
2 multivariate lognormal distribution

$$m = \exp\left((2\mu + \sigma^2)/2\right) \quad (۲-۱۱)$$

$$s = \sqrt{\exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2)} \quad (۲-۱۲)$$

و نیز می‌توانیم μ و σ را بر اساس پارامترهای توزیع لاگ‌نرمال استخراج کنیم:

$$\mu = \ln\left(\frac{m^2}{\sqrt{s^2 + m^2}}\right) \quad (۲-۱۳)$$

$$\sigma = \sqrt{\ln[(s/m)^2 + 1]} \quad (۲-۱۴)$$

اکنون به مثال خود بازمی‌گردیم. کمی پیش‌تر به این نتیجه رسیدیم که بردار بازدهٔ دارایی دارای توزیع چندمتغیرهٔ نرمال است. هم‌چنین به‌خاطر داریم که از مدل تک‌شاخصی برای تشریح بازدهٔ اوراق بهادار استفاده کردیم. اکنون که پارامترهای تخمینی را در اختیار داریم، اقدام به محاسبهٔ بازدهٔ موردانتظار هرکدام از اعضای بردار بازدهٔ دارایی می‌کنیم:

$$\mathbf{E(r_1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 I_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 I_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.02 + 1.4 \times 0.01 \\ -0.01 + 1.1 \times 0.01 \\ 0.03 + 0.8 \times 0.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.034 \\ 0.001 \\ 0.038 \end{pmatrix}$$

محاسبهٔ واریانس بردار بازدهٔ دارایی، مستلزم برآورد ماتریس واریانس-کوواریانس بازدهٔ دارایی‌ها در زمان یک است. برآورد این ماتریس برای مدل تک‌شاخصی نسبتاً ساده است. در واقع، برای این کار دانستن بتای هر دارایی و واریانس شاخص سهام کفایت می‌کند. دقت داشته باشید که با افزایش پیچیدگی سبد دارایی و به موازات آن افزایش پیچیدگی تابع ارزش سبد دارایی، اجرای فرآیند انتقال مشکل‌تر و مستلزم استفاده از فنون پیشرفتهٔ آماری است. البته، برای سبد سادهٔ این مثال، طی این فرآیند با پیچیدگی همراه نیست.

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \beta_1^2\sigma_{I_1}^2 & \beta_1\beta_2\sigma_{I_1}^2 & \beta_1\beta_3\sigma_{I_1}^2 \\ \beta_2\beta_1\sigma_{I_1}^2 & \beta_2^2\sigma_{I_1}^2 & \beta_2\beta_3\sigma_{I_1}^2 \\ \beta_3\beta_1\sigma_{I_1}^2 & \beta_3\beta_2\sigma_{I_1}^2 & \beta_3^2\sigma_{I_1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0098 & 0.0077 & 0.0056 \\ 0.0077 & 0.00605 & 0.0044 \\ 0.0056 & 0.0044 & 0.0032 \end{pmatrix}$$

که $\sigma_{I_1}^2$ واریانس بازدهٔ شاخص سهام در زمان یک است.

بدین ترتیب، تاکنون بازدهٔ موردانتظار اعضای بردار بازدهٔ دارایی و نیز ماتریس واریانس–کوواریانس این بردار برآورد شد. اما، برای دستیابی به توزیع ارزش سبد دارایی، باید پارامترهای بردار بازدهٔ نمایی دارایی را برآورد کنیم. درصورتی‌که بازده‌ها نرمال باشد، توزیع نمایی آن‌ها بر پایهٔ عدد نپر دارای توزیع لاگ‌نرمال خواهد بود. اکنون با استفاده از روابط (۲–۱۱) و (۲–۱۲)، معادل لاگ‌نرمالِ پارامترهای تخمینی نرمال را به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{m}_1 = E\left(\exp(r_{1,1})\right) = \exp\left[\left(\frac{2\times 0.034 + 0.0098}{2}\right)\right] = 1.039666$$

$$\hat{m}_2 = E\left(\exp(r_{2,1})\right) = \exp\left[\left(\frac{2\times 0.001 + 0.00605}{2}\right)\right] = 1.004033$$

$$\hat{m}_3 = E\left(\exp(r_{3,1})\right) = \exp\left[\left(\frac{2\times 0.038 + 0.0032}{2}\right)\right] = 1.040394$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{exp}(\mathbf{r}_1)\right) = \begin{pmatrix} \exp(r_{1,1}) \\ \exp(r_{2,1}) \\ \exp(r_{3,1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.039666 \\ 1.004033 \\ 1.040394 \end{pmatrix}$$

ماتریس واریانس–کوواریانس این بردار عبارت است از:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.010645 & 0.008354 & 0.006522 \\ 0.008354 & 0.006117 & 0.004788 \\ 0.006522 & 0.004788 & 0.003469 \end{pmatrix}$$

به‌عنوان مثال، نحوهٔ محاسبهٔ درایهٔ سطر اول و ستون اول این ماتریس را نشان می‌دهیم:

$$s_{1,1}^2 = \exp[2\times 0.034 + 2\times 0.0098] - \exp[2\times 0.0034 + 0.0098] = 0.010645$$

برای محاسبهٔ کوواریانس‌های این ماتریس نیز به‌طرز مشابهی عمل می‌کنیم با این تفاوت که به‌جای میانگین، مجموع میانگین‌های متناظر در توزیع نرمال و به‌جای واریانس،

کوواریانس متناظر را قرار می‌دهیم. به‌عنوان مثال برای کوواریانس درایه سطر اول و ستون دوم داریم:

$$s_{1,2}^2 = \exp[2\times(0.034+0.001)+2\times0.0077] \\ -\exp[2\times(0.0034+0.001)+0.0077] = 0.008354$$

تاکنون نتیجهٔ کارمان شامل برآورد بازده موردانتظار اعضای بردار بازدهٔ نمایی دارایی و ماتریس واریانس–کوواریانس این بردار است. اما، هنوز یک قدم با پارامترهای تخمینی توزیع ارزش سبد دارایی فاصله داریم. بار دیگر به رابطهٔ نهایی نگاشت سبد دارایی نگاه کنید. بدیهی است نگاشت سبد دارایی با یک بردار سطری از اعداد ثابت کامل می‌شود و هنوز این بردار را در برآورد پارامترها وارد نکرده‌ایم. با احتساب این بردار خواهیم داشت:

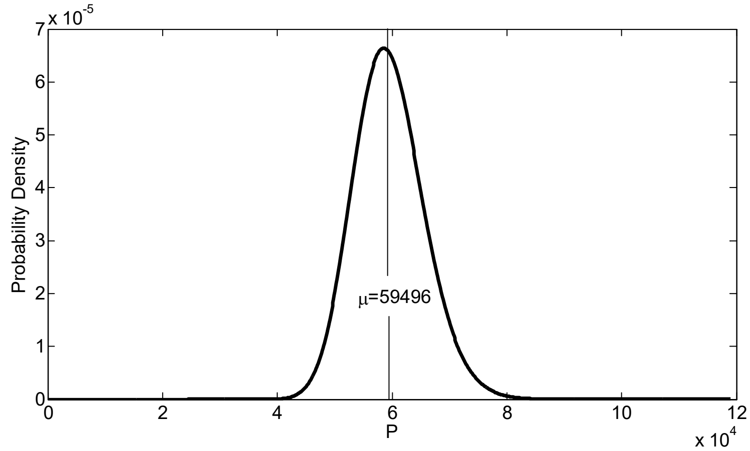
$$\hat{m} = E(P_1) = \begin{pmatrix}25000 & 80000 & -45000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.039666\\ 1.004033\\ 1.040394\end{pmatrix} = 59496$$

و سپس واریانس ارزش سبد را محاسبه می‌کنیم:

$$\hat{s}^2 = \begin{pmatrix}25000 & 80000 & -45000\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0.010645 & 0.008354 & 0.006522\\ 0.008354 & 0.006117 & 0.004788\\ 0.006522 & 0.004788 & 0.003469\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25000\\ 80000\\ -45000\end{pmatrix} \\ = 37095670$$

با برآورد واریانس، مشخصات توزیع ارزش سبد دارایی کامل می‌شود و فرآیند انتقال پایان می‌پذیرد. توجه کنید که از روی مشخصات توزیع بازدهٔ نرمال، به مشخصات توزیع لاگ‌نرمال دست یافتیم. به‌عبارتی دیگر از طریق برآورد پارامترهای توزیع $\mathbf{r_1}$ به پارامترهای تخمینی توزیع $\mathbf{exp(r_1)}$ و سرانجام به پارامترهای تخمینی توزیع P_1 رسیدیم.

حالا تصویر کاملی از توزیع ارزش سبد دارایی در اختیار داریم. ارزش سبد برای دورهٔ آتی و مشروط بر اطلاعات موجود تا زمان صفر، دارای توزیع لاگ‌نرمال با ارزش موردانتظار ۵۹۴۹۶ و واریانس ۳۷۰۹۵۶۷۰ است. این توزیع در نمودار صفحهٔ بعد ارایه شده است.



نمودار (۲-۶): توزیع لاگ‌نرمال با میانگین ۵۹۴۹۶ و واریانس ۳۷۰۹۵۶۷۰

با تکمیل فرآیند انتقال، به سراغ گام آخر یعنی برآورد مقدار VaR می‌رویم. برای تخمین VaR، ارزش بحرانی سبد دارایی را برای توزیع ارزش لاگ‌نرمال محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که ارزش بحرانی با صدک آلفای توزیع ارزش سبد دارایی برابر است. یعنی:

$$P^C = q_P(\alpha) \qquad (۱۵-۲)$$

که $q_P(\alpha)$ صدک آلفای توزیع ارزش است. این صدک نیز از طریق معکوس تابع توزیع تجمعی ارزش سبد دارایی برای احتمال α به‌دست می‌آید:

$$q_P(\alpha) = F_P^{-1}(\alpha) \qquad (۱۶-۲)$$

برای تعیین ارزش بحرانی سبد دارایی در توزیع لاگ‌نرمال ابتدا پارامترهای توزیع نرمال را از روی پارامترهای توزیع لاگ‌نرمال به‌دست می‌آوریم:

$$\mu = \ln\left(\frac{59496^2}{\sqrt{37095670 + 59496^2}}\right) = 10.98846126$$

$$\sigma = \sqrt{\ln\left((6120/59496)^2 + 1\right)} = 0.102102626$$

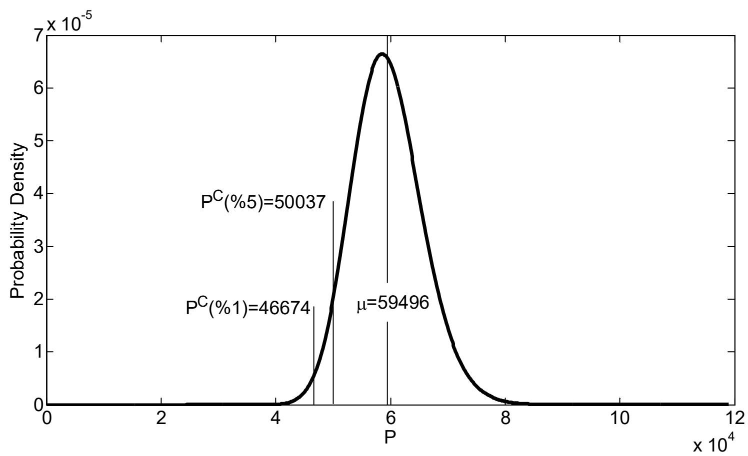
سپس، بر اساس این پارامترها ارزش بحرانی سبد را محاسبه می‌کنیم:

$$\Pr\left\{X \le P^C\right\} = \alpha$$
$$\Pr\left\{\ln(X) \le \ln(P^C)\right\} = \alpha$$
$$\Pr\left\{Z \le \frac{\ln(P^C) - \mu}{\sigma}\right\} = \alpha$$
$$\Rightarrow \quad P^C = \exp(\mu + z_\alpha \sigma) \quad (۱۷-۲)$$

که z_α معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال‌استاندارد در سطح اطمینان $1-\alpha$ است. در سطوح اطمینان ۹۵٪ و ۹۹٪ ارزش بحرانی برابر است با:

$$\alpha = 5\% \to P^C = \exp(10.98846126 - 1.645 \times 0.102102626) = 50037$$
$$\alpha = 1\% \to P^C = \exp(10.98846126 - 2.326 \times 0.102102626) = 46674$$

در نمودار زیر، مقادیر ارزش‌های بحرانی را در سطوح اطمینان ۹۵٪ و ۹۹٪ بر روی توزیع لاگ‌نرمال نشان داده‌ایم.



نمودار (۲-۷): ارزش‌های بحرانی برای توزیع لاگ‌نرمال با میانگین ۵۹۴۹۶ و واریانس ۳۷۰۹۵۶۷۰

همان‌گونه که از شکل مشخص است. در سطوح اطمینان ۹۵٪ و ۹۹٪، ارزش سبد دارایی برای دورهٔ آینده به‌ترتیب کمتر از ۵۰٬۰۳۷ و ۴۶٬۶۷۴ تومان نخواهد شد.

در نهایت ارزش درمعرض‌ریسک سبد دارایی در سطوح اطمینان ۹۵٪ و ۹۹٪ برابر است با:

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow VaR = p_0 - P^C = 60000 - 50037 = 9963$$
$$1-\alpha = 0.99 \rightarrow VaR = p_0 - P^C = 60000 - 46674 = 13326$$

در این‌جا مثالی ساده از نحوهٔ پیاده‌سازی فرآیند محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک ارایه شد. بدیهی است بسته به ویژگی‌های دارایی‌های موجود در سبد باید عوامل ریسک دیگری را نیز وارد محاسبات کنیم. برای مثال زمانی که سبد شامل ارز و یا اوراق بهادار دیگر کشورهاست، نرخ ارز به‌عنوان یک عامل ریسک، تشریح‌کنندهٔ تلاطم‌های این بخش از دارایی‌هاست و بنابراین در نگاشت دارایی‌های ارزی باید لحاظ گردد؛ زمانی که سبد شامل اوراق قرضهٔ بلندمدت است، نرخ بهره جهت انعکاس ریسک نوسان نرخ بهره باید مورد ملاحظه قرار گیرد و زمانی که سبد دارایی شامل قراردادها و پیمان‌های آتی است، قیمت کالاهای تعهدشده باید به‌عنوان عامل ریسک در نظر گرفته شود.

داده‌ها

تا کنون، آنچه که مبنای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک قرار گرفت، توزیع احتمال ارزش سبد دارایی بوده است. در واقع در فرآیندی که شرح آن بیان شد، تابع نگاشت سبد دارایی را برای تشریح نحوهٔ شکل‌گیری قیمت‌های سبد ارایه نمودیم. در عمل، می‌توان تابع نگاشت را برای داده‌های سود/زیان یا داده‌های زیان/سود و یا داده‌های مربوط به بازدهٔ سبد دارایی تشکیل داد. در بسیاری از موارد کارکردن با این داده‌ها ساده‌تر از داده‌های مربوط به ارزش سبد دارایی است، چراکه اغلب نظریه‌های مالی به‌دنبال تشریح نحوهٔ شکل‌گیری بازدهٔ اوراق بهادار است و گاهی اوقات نیز به تشریح سود و زیان آتی سبد دارایی می‌پردازد. در این‌جا، به نحوهٔ استخراج این‌گونه داده‌ها از روی داده‌های تاریخی پرداخته می‌شود. سپس، نحوهٔ محاسبهٔ VaR بر اساس این داده‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

داده‌های سود/زیان[1]

داده‌های موجود برای اندازه‌گیری و تجزیه و تحلیل ریسک بازار، ممکن است اشکال مختلفی داشته باشد. شاید ساده‌ترین شکل ارایۀ داده‌ها بر اساس سود/زیان باشد. ما سود/زیان حاصل از یک دارایی یا یک سبد دارایی در دورۀ t را با ارزش دارایی یا سبد دارایی در پایان دورۀ t به‌علاوه پرداخت‌های میان‌دوره‌ای (D_t) منهای ارزش دارایی در پایان دورۀ $t\text{-}1$ تعریف می‌کنیم. یعنی:

$$P / L_t = P_t + D_t - P_{t-1} \quad (۲–۱۸)$$

اگر داده‌ها به شکل P/L باشد، مقادیر مثبت نشانگر سود و مقادیر منفی گویای زیان است. اگر بخواهیم دقیق رفتار کنیم، باید هر پرداخت میان‌دوره‌ای را در زمان خودش مورد ملاحظه قرار دهیم و بدین ترتیب ارزش زمانی پول را به حساب آوریم. بنابراین، رابطۀ (۲–۱۸) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$present\ value(P / L_t) = \frac{P_t + D_t}{1+r} - P_{t-1} \quad (۲–۱۹)$$

که r نرخ تنزیل است. به منظور حفظ سادگی، در رابطۀ فوق فرض بر این است که زمان پرداخت‌های میان‌دوره‌ای در پایان دورۀ t می‌باشد. تفاوت این دو رابطه به نرخ تنزیل بستگی دارد و در صورت کوتاه‌بودن دوره‌ها، کوچک خواهد بود.

برآورد VaR بر اساس توزیع احتمال سود/زیان

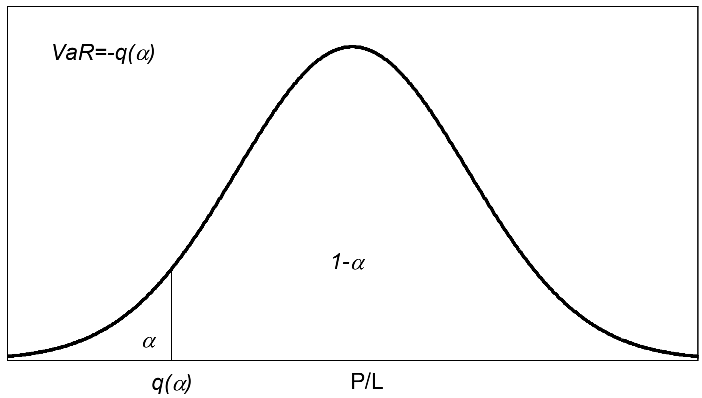
پس از این‌که فرآیند محاسبۀ VaR را برای تابع نگاشت سود/زیان سبد دارایی طی کردیم، توزیع احتمال سود/زیان سبد به‌دست می‌آید. حال، کافی است صدک آلفای این توزیع را محاسبه کنیم. این مقدار برابر ارزش درمعرض‌ریسک سبد دارایی است. با فرض این‌که داده‌های P/L دارای توزیع نرمال است، VaR در سطح اطمینان $1-\alpha$ عبارت است از:

---

1. profit/loss (P/L)

$$VaR = -\mu_{P/L} + \sigma_{P/L}\, z_{\alpha} \quad (۲۰-۲)$$

که $\mu_{P/L}$ و $\sigma_{P/L}$ به‌ترتیب میانگین و انحراف‌معیار توزیع سود/زیان سبد دارایی است و z_{α} برابر با معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال‌استاندارد در سطح اطمینان $1-\alpha$ است. در نمودار زیر ارزش درمعرض‌ریسک برای داده‌های سود/زیان نرمال ارایه شده است.



نمودار (۲-۸): توزیع سود/زیان نرمال و ارزش درمعرض‌ریسک

مثال (۲-۲): محاسبهٔ VaR برای توزیع نرمال P/L

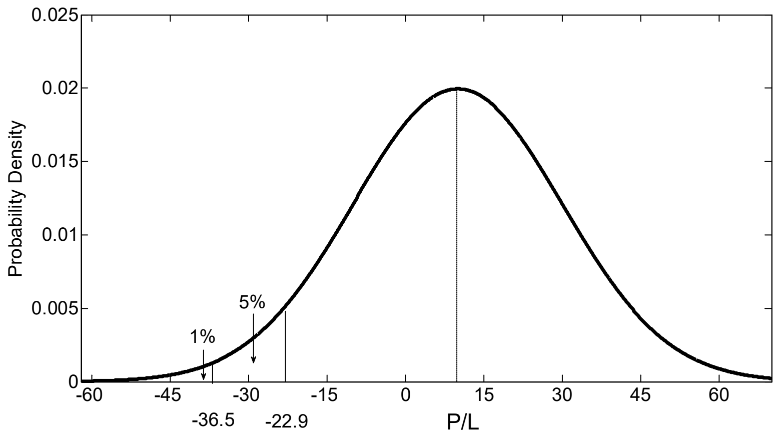
فرض کنید توزیع سود/زیان یک سبد دارایی طی یک دوره، نرمال با میانگین ۱۰ و انحراف‌معیار ۲۰ می‌باشد. بر اساس رابطهٔ (۲-۲۰) ارزش درمعرض‌ریسک در سطح اطمینان ۹۵٪ برابر است با:

$$VaR = -10 + 20 \times 1.645 = 22.9$$

و در سطح اطمینان ۹۹٪ برابر است با:

$$VaR = -10 + 20 \times 2.326 = 36.5$$

در نمودار صفحهٔ بعد، ارزش درمعرض‌ریسک در این سطوح اطمینان ارایه شده است.



نمودار (۲-۹): ارزش درمعرض‌ریسک برای توزیع سود/زیان نرمال

داده‌های زیان/سود[۱]

داده‌های L/P را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L/P_t = -P/L_t \qquad (۲-۲۱)$$

مقادیر مثبت این مشاهدات بیان‌گر زیان و مقادیر منفی گویای سود است. گاهی اوقات کارکردن با این‌گونه داده‌ها برای اهداف اندازه‌گیری ریسک اندکی ساده‌تر است، چراکه برخی سنجه‌های ریسک بر اساس زیان بیان می‌شود.

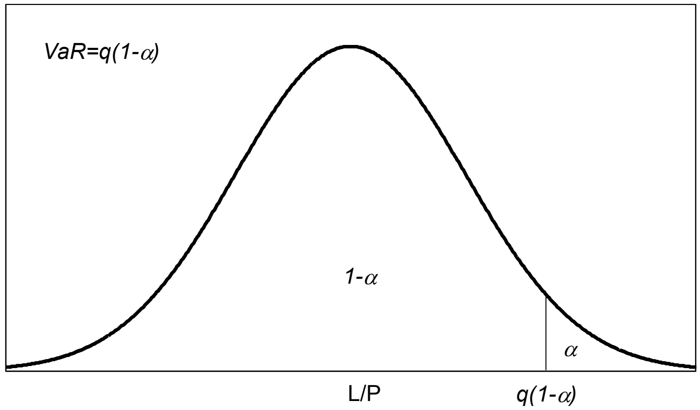
برآورد VaR بر اساس توزیع احتمال زیان/سود

با در دست‌داشتن توزیع احتمال L/P، کافی است صدک بحرانی را محاسبه نماییم. با فرض این‌که داده‌های L/P دارای توزیع نرمال است، VaR در سطح اطمینان $1-\alpha$ بر اساس رابطهٔ (۲-۲۲) محاسبه می‌شود:

$$VaR = \mu_{L/P} + \sigma_{L/P}\, z_\alpha \qquad (۲-۲۲)$$

1. loss/profit (L/P)

در نمودار زیر ارزش درمعرض‌ریسک برای داده‌های زیان/سود نرمال ارایه شده است.



نمودار (۲-۱۰): توزیع زیان/سود نرمال و ارزش درمعرض‌ریسک

برای داده‌های زیان/سود، زیان‌ها در سمت راست توزیع قرار دارد. بنابراین، صدک متناظر با VaR نیز در سمت راست قرار می‌گیرد، اما چون همیشه ارزش درمعرض‌ریسک با اعداد مثبت بیان می‌شود، لازم نیست مقدار حاصل از این صدک در یک منفی ضرب شود.

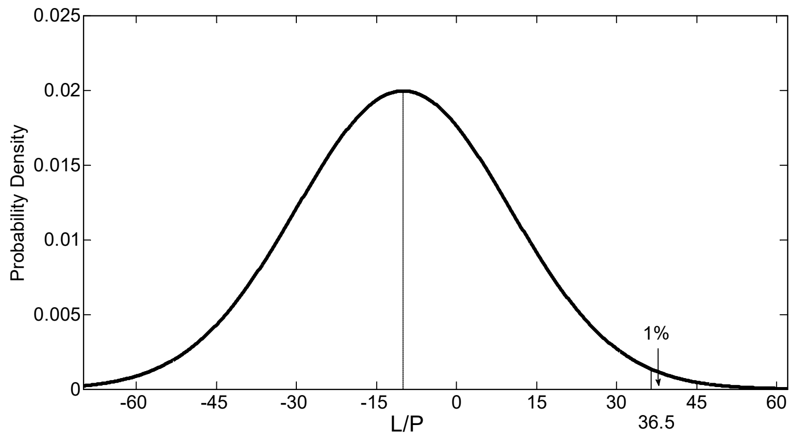
مثال (۲-۳): محاسبهٔ VaR برای توزیع نرمال L/P

فرض کنید زیان/سود یک سبد دارایی طی دورهٔ آتی دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰- و انحراف‌معیار ۲۰ می‌باشد.

بر اساس رابطهٔ (۲-۲۲) ارزش درمعرض‌ریسک نرمال در سطح اطمینان ۹۹٪ برابر است با:

$$VaR = -10 + 20 \times 2.326 = 36.5$$

ارزش‌درمعرض‌ریسک محاسبه‌شده در مثال فوق در نمودار (۲-۱۱) ارایه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ارزش درمعرض‌ریسک در سمت راست توزیع نرمال واقع شده است.



نمودار (۲-۱۱): محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک برای توزیع زیان/سود نرمال

داده‌های مبتنی بر بازدهٔ حسابی[۱]

داده‌ها ممکن است به شکل بازدهٔ حسابی یا ساده[۲] باشد. بازدهٔ حسابی طی دورهٔ t به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (۲۳-۲)$$

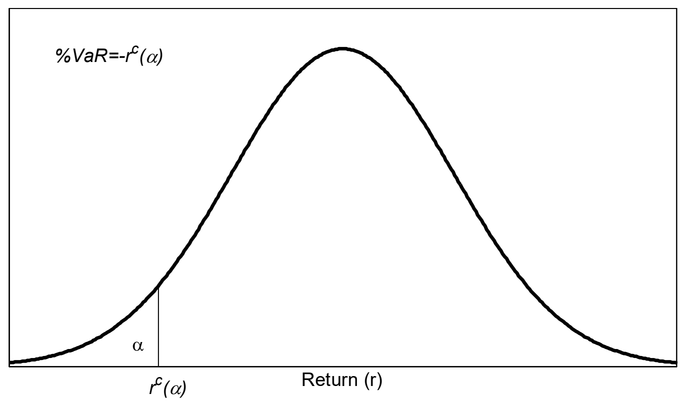
که حاصل تقسیم سود/زیان حاصل در طی دورهٔ t بر ارزش دارایی در پایان دورهٔ $t-1$ است.

در محاسبهٔ بازدهٔ حسابی به‌سادگی فرض می‌کنیم که پرداخت‌های میان‌دوره‌ای به خودی خود هیچ بازدهی ایجاد نمی‌کند. بدیهی است این فرض برای دوره‌های بلندمدت چندان مناسب نیست، چراکه جریان‌های نقد میان‌دوره‌ای اغلب مشمول سرمایه‌گذاری مجدد می‌شود. بنابراین، نباید از بازدهٔ حسابی برای افق‌های زمانی بلندمدت استفاده کنیم.

1. arithmetic return
2. simple return

برآورد VaR بر اساس توزیع احتمال بازدهٔ حسابی

ارزش درمعرض‌ریسک را می‌توان بر اساس درصدی از ارزش سبد دارایی تعریف کرد که در معرض کاهش ارزش قرار دارد. به این VaR، ارزش درمعرض‌ریسک درصدی می‌گوییم و آن را با $\%VaR$ نمایش می‌دهیم. به نمودار زیر توجه کنید.



نمودار (۲-۱۲): بازدهٔ حسابی نرمال و ارزش درمعرض‌ریسک

در این نمودار $\%VaR$ در سطح اطمینان $1-\alpha$ با فرض نرمال‌بودن توزیع بازدهٔ حسابی ارایه شده است. بدیهی است که طبق تعریف، $\%VaR$ برابر صدک آلفای توزیع بازدهٔ سبد دارایی با علامت منفی می‌باشد:

$$\%VaR = -r^{C}(\alpha) = -q_r(\alpha) = -F_r^{-1}(\alpha) \quad (۲\text{-}۲۴)$$

که $r^{C}(\alpha)$ بازدهٔ بحرانی سبد دارایی، $q_r(\alpha)$ صدک آلفای بازدهٔ سبد و $F_r^{-1}(\alpha)$ معکوس تابع توزیع تجمعی بازدهٔ سبد است. بدیهی است که تمامی این علائم معانی یکسانی دارد.

با داشتن ارزش درمعرض‌ریسک درصدی، محاسبهٔ VaR کار ساده‌ای است. برای این کار، کافی است ارزش سبد دارایی در دورهٔ جاری (زمان صفر) را در $\%VaR$ ضرب کنیم:

$$VaR = p_0 \times \%VaR \quad (۲\text{-}۲۵)$$

با فرض این‌که بازدهٔ سبد دارایی به‌صورت نرمال توزیع شده است، می‌توان نوشت:

$$\%VaR = -\left(\mu_r - \sigma_r z_\alpha\right) \quad (۲-۲۶)$$

که μ_r و σ_r به ترتیب میانگین و انحراف‌معیار بازدهٔ حسابی سبد دارایی و z_α نیز معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال‌استاندارد در سطح اطمینان $1-\alpha$ است. بدین ترتیب VaR از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$VaR = p_0 \times \%VaR = -p_0\left(\mu_r - \sigma_r z_\alpha\right) \quad (۲-۲۷)$$

مثال (۲-۴): برآورد VaR بر اساس بازده‌های حسابی نرمال

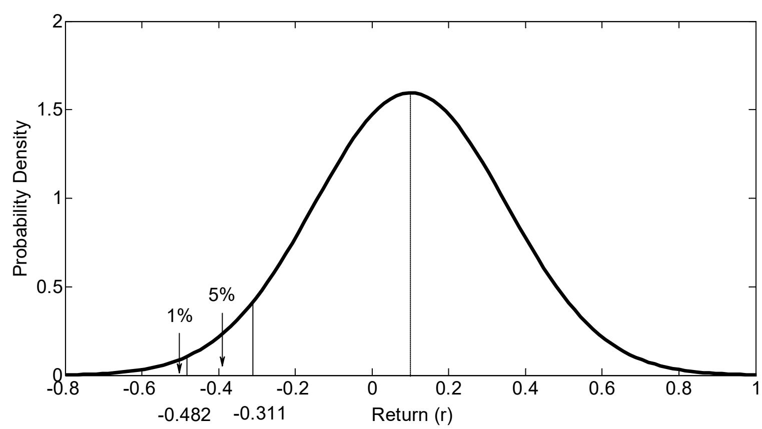
فرض کنید بازدهٔ حسابی طی دورهٔ نگهداری (دورهٔ پیش‌بینی) سبد دارایی، دارای توزیع نرمال با میانگین ۰/۱ و انحراف‌معیار ۰/۲۵ است و قیمت جاری سبد دارایی ۱۰۰ میلیون تومان می‌باشد. $\%VaR$ در سطح اطمینان ۹۵٪ برابر است با:

$$\%VaR = -0.1 + 0.25 \times 1.645 = 0.311$$

و در سطح اطمینان ۹۹٪ خواهیم داشت:

$$\%VaR = -0.1 + 0.25 \times 2.326 = 0.482$$

نمودار زیر، $\%VaR$ را برای این سطوح اطمینان به‌نمایش می‌گذارد.



نمودار (۲-۱۳): برآورد ارزش درمعرض‌ریسک بر اساس بازدهٔ حسابی نرمال

این اعداد بدین معنی است که در سطح اطمینان ۹۵٪ و ۹۹٪ به‌ترتیب ۳۱/۱٪ و ۴۸٪/۲ از ارزش جاری سبد دارایی در معرض ریسک است. بنابراین، VaR در این دو سطح اطمینان برابر است با:

$$VaR = 100 \times 0.331 = 33.1$$
$$VaR = 100 \times 0.482 = 48.2$$

داده‌های مبتنی بر بازدهٔ هندسی[1]

بازده ممکن است به شکل هندسی یا مرکب باشد که بر اساس رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود :

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right) \quad (۲۸-۲)$$

البته، این رابطه به نوع خاصی از بازدهٔ هندسی یا مرکب، یعنی بازدهٔ مرکب مستمر[2]مربوط می‌شود. در این کتاب هرجا از بازدهٔ هندسی نام می‌بریم، منظورمان این نوع بازده است که به آن بازدهٔ لگاریتمی[3] نیز می‌گویند. بازدهٔ هندسی به‌طور ضمنی فرض را بر این می‌گیرد که پرداخت‌های میان‌دوره‌ای به‌طور مستمر مجدداً سرمایه‌گذاری می‌شود. بازدهٔ هندسی نسبت به بازدهٔ حسابی اغلب به‌لحاظ اقتصادی بار معنایی بیشتری دارد، چراکه بدون توجه به اندازهٔ بازده‌های منفی، ضامن منفی‌نشدن قیمت دارایی یا سبد دارایی است. به‌عبارتی دیگر، در بازده‌های حسابی، یک بازدهٔ بسیار پایین یا یک زیان بسیار بزرگ ممکن است به منفی‌شدن قیمت دارایی منجر شود که به ندرت حاوی مفهوم اقتصادی است.

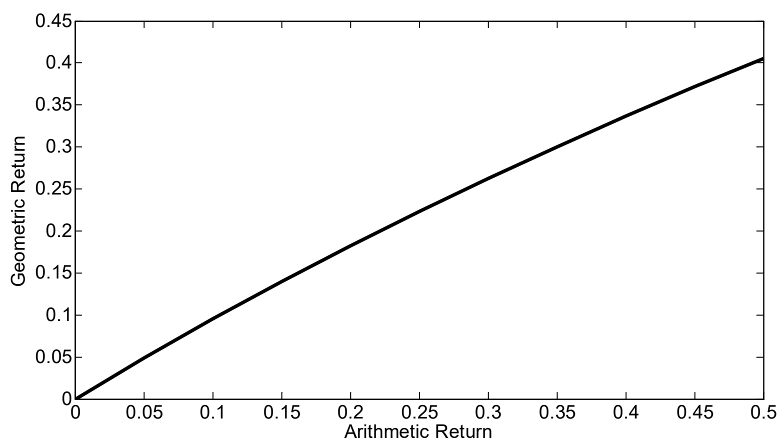
استفاده از بازدهٔ هندسی ساده‌تر است. به‌عنوان مثال، اگر با چند دوره سروکار داریم، بازدهٔ هندسی این دوره‌ها برابر است با مجموع بازده‌های یک دوره‌ای. بازدهٔ حسابی از این

1. geometric return
2. continuous compound return
3. logarithmic return

ویژگی برخوردار نیست. رابطهٔ بین این دو نوع بازده را می‌توان با بازنویسی رابطهٔ (۲–۲۸) مورد بررسی قرار داد:

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(1 + r_t) = r_t - \frac{1}{2}r_t^2 + \frac{1}{3}r_t^3 - \cdots \quad (۲\text{–}۲۹)$$

در این رابطه، از بسط سری تیلور[1] برای لگاریتم طبیعی استفاده کرده‌ایم. اگر بازده‌ها کوچک باشد، بازدهٔ هندسی تقریباً برابر بازدهٔ حسابی خواهد بود. این نتیجه‌گیری در نمودار (۲–۱۴) ارایه شده است. در این نمودار بازدهٔ هندسی (R) در مقابل بازدهٔ حسابی (r) ترسیم شده است. وقتی هر دو بازده کوچک است، تفاوت بین آن‌ها قابل‌اغماض است، اما با بزرگ‌ترشدن بازده‌ها، همان‌گونه که انتظار داریم، این اختلاف افزایش می‌یابد، چراکه بازدهٔ هندسی تابعی لگاریتمی از بازدهٔ حسابی است. از آنجا که انتظار داریم بازده‌ها در دوره‌های کوتاه‌مدت، کوچک و در دوره‌های بلندمدت، بزرگ‌تر باشد، اختلاف بین این دو نوع بازده در دوره‌های کوتاه‌مدت قابل‌چشم‌پوشی است، اما به‌طور بالقوه در دوره‌های طولانی‌تر قابل‌ملاحظه است. از آن‌جا که بازدهٔ هندسی درآمد میان‌دوره‌ای را به‌حساب می‌آورد، بهتر است برای بازده‌های مربوط به دوره‌های طولانی‌تر، از این بازده استفاده کنیم.



نمودار (۲–۱۴): رابطهٔ بین بازدهٔ هندسی و حسابی

1. Taylor’s series expansion

مثال (۲-۵): بازده هندسی و حسابی
اگر بازدهٔ حسابی طی یک دوره ۵٪ باشد. بازدهٔ هندسی برابر است با:

$$R_t = \ln(1 + r_t) = \ln(1.05) = 0.0488$$

اگر بازدهٔ هندسی ۵٪ باشد، بازدهٔ حسابی برابر است با:

$$r_t = \exp(R_t) - 1 = \exp(0.05) - 1 = 0.0513$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید در هر دو مورد، بازدهٔ حسابی نزدیک به بازدهٔ هندسی و اندکی بالاتر است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که بازدهٔ هندسی با نرخ سریع‌تری رشد می‌کند.

برآورد VaR بر اساس توزیع احتمال بازدهٔ هندسی

مطابق رابطهٔ (۲-۲۴)، در این‌جا نیز $\%VaR$ را از طریق رابطهٔ زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\%VaR = -R^C(\alpha) = -q_R(\alpha) = -F_R^{-1}(\alpha) \quad (۳۰-۲)$$

که $R^C(\alpha)$ بازدهٔ هندسی بحرانی در سطح خطای α است.
با فرض این‌که بازدهٔ هندسی دارای توزیع نرمال است، خواهیم داشت:

$$\%VaR = -(\mu_R - \sigma_R z_\alpha) \quad (۳۱-۲)$$

که μ_R و σ_R به‌ترتیب میانگین و انحراف‌معیار بازدهٔ هندسی سبد دارایی است و z_α نیز معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال‌استاندارد در سطح اطمینان $1-\alpha$ است.
برای محاسبهٔ VaR، ابتدا ارزش بحرانی سبد دارایی را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} R^C &= \ln(P^C / p_0) \\ \exp(R^C) &= P^C / p_0 \quad (۳۲-۲) \\ P^C &= p_0 \exp(R^C) \end{aligned}$$

با جای‌گذاری ارزش بحرانی در رابطهٔ (۲-۳) خواهیم داشت:

$$VaR = p_0\left(1 - \exp(R^C)\right) \quad (۳۳-۲)$$

درنهایت ارزش درمعرض‌ریسک عبارت است از:

$$VaR = p_0\left[1 - \exp\left(\mu_R - \sigma_R z_\alpha\right)\right] \quad (۳۴-۲)$$

توجه داشته باشید اگر بازدهٔ هندسی دارای توزیع نرمال باشد، قیمت از توزیع لاگ‌نرمال تبعیت می‌کند. یعنی، وقتی $VaR\%$ را برای بازده‌های هندسی نرمال برآورد می‌کنیم، VaR بر اساس صدک موردنظر بر روی توزیع ارزش (قیمت) لاگ‌نرمال به‌دست می‌آید. به همین دلیل به این VaR، ارزش درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال[1] می‌گویند. بنابراین، وقتی بازدهٔ هندسی دارای توزیع نرمال است، الزاماً باید ارزش درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال را محاسبه کنیم.

مثال (۲-۶): ارزش درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال

بازدهٔ هندسی طی دورهٔ نگهداری آتی دارای توزیع نرمال با میانگین ۰/۰۵ و انحراف‌معیار ۰/۲ است و قیمت جاری سبد دارایی نیز ۱۰۰ میلیون تومان می‌باشد. $\%VaR$ در سطح اطمینان ۹۵٪ برابر است با:

$$\%VaR = -0.05 + 0.2 \times 1.645 = 0.279$$

و در سطح اطمینان ۹۹٪ خواهیم داشت:

$$\%VaR = -0.05 + 0.2 \times 2.326 = 0.415$$

VaR در این دو سطح اطمینان برابر است با:

$$1 - \alpha = 95\% \rightarrow VaR = 100\left(1 - \exp\left(0.05 - 0.2 \times 1.645\right)\right) = 24$$
$$1 - \alpha = 99\% \rightarrow VaR = 100\left(1 - \exp\left(0.05 - 0.2 \times 2.326\right)\right) = 34$$

1. lognormal VaR

مثال (۲-۷): ارزش درمعرض‌ریسک نرمال در مقابل لاگ‌نرمال

فرض کنید میانگین و انحراف‌معیار بازدهٔ روزانه به‌ترتیب ۰/۰۰۴ و ۰/۰۲۵۳ بوده و دارای توزیع نرمال است. اگر ارزش جاری سبد ۱۰۰ میلیون تومان باشد، ارزش درمعرض‌ریسک نرمال در سطح اطمینان ۹۵٪ برای دورهٔ نگهداری یک‌روزه برابر است با:

$$VaR = -100\left(0.0004 - 0.0253 \times 1.645\right) = 4.12$$

و ارزش درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال ۹۵٪ برای دورهٔ نگهداری یک‌روزه برابر است با:

$$VaR = 100\left[1 - \exp\left(0.004 - 0.0253 \times 1.645\right)\right] = 4.04$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید این دو مقدار بسیار به هم نزدیک است و این حالت زمانی رخ می‌دهد که دوره‌های نگهداری کوتاه باشد.

نگاشت بازدهٔ سبد دارایی

کارکردن با توزیع بازدهٔ دارایی‌ها نسبت به توزیع ارزش آن‌ها برای بسیاری از فعالان ریسک از قابلیت درک بیشتری برخوردار است، چراکه در اغلب متون برای اندازه‌گیری ریسک از داده‌های بازده استفاده می‌شود. به‌علاوه، بسیاری از نظریه‌های مالی بر مبنای بازدهٔ قیمت‌ها شکل گرفته است. بنابراین، به‌جای استفاده از داده‌های قیمت اوراق بهادار از داده‌های بازدهٔ آن‌ها برای محاسبهٔ سنجه‌های ریسک استفاده می‌کنیم. بر این اساس، رابطهٔ نگاشت سبد دارایی را که برحسب قیمت اوراق بهادار بیان گردید، بر حسب بازدهٔ اوراق بهادار بازنویسی می‌کنیم:

$$P_1 = \boldsymbol{\omega}\,\mathbf{S_1} = p_0(1 + \mathbf{w r_1}) \quad (۳۵\text{-}۲)$$

و اگر بخواهیم ارزش سبد دارایی را بر اساس بازدهٔ مستمر حساب کنیم، خواهیم داشت:

$$P_1 = p_0 \exp(\mathbf{w r_1}) \quad (۳۶\text{-}۲)$$

که p_0 ارزش سبد دارایی در زمان صفر، $\mathbf{w}$ بردار سطری وزن دارایی‌های سبد و $\mathbf{r_1}$ بردار بازدهٔ دارایی در زمان یک است. بنابراین، در دو رابطهٔ فوق به‌جای استفاده از بردار موجودی‌های سبد دارایی و بردار دارایی، نگاشت را بر اساس بردار وزن موجودی‌های سبد و بردار بازدهٔ دارایی ارایه نموده‌ایم. بدیهی است حاصل‌ضرب دو بردار اخیر، بازدهٔ سبد دارایی در زمان یک است. یعنی:

$$r_{p,1} = \mathbf{w}\mathbf{r_1} \qquad (۳۷-۲)$$

بنابراین، از این به بعد به‌جای این‌که ارزش سبد دارایی را به‌صورت تابعی از بردار دارایی در نظر بگیریم، بازدهٔ سبد دارایی را به‌صورت تابعی از بردار بازدهٔ دارایی می‌نویسیم و در انتها، بازدهٔ سبد را به ارزش آن تبدیل می‌کنیم.

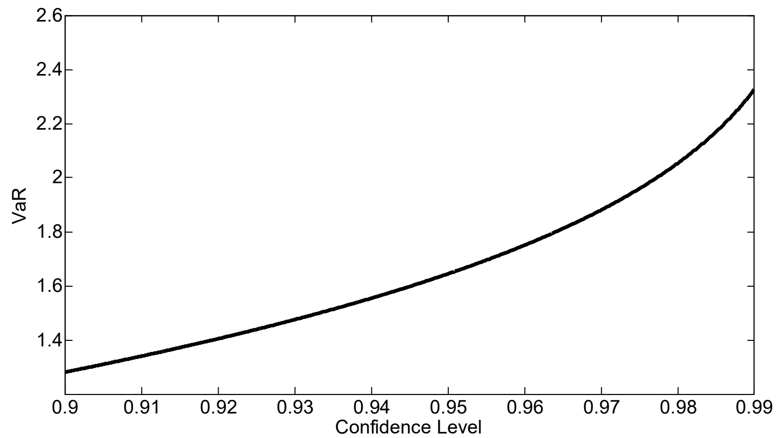
توجه داشته باشید که در فصل‌های بعدی، بیشتر روابط و محاسبات بر مبنای بازدهٔ دارایی‌ها طراحی شده است، نه بر مبنای ارزش دارایی‌ها و یا سود و زیان حاصل از آن‌ها. بنابراین، تبدیل نگاشت ارزش سبد دارایی به نگاشت بازدهٔ سبد دارایی ضروری به‌نظر می‌رسد.

سطح اطمینان و افق زمانی

استفاده از VaR مستلزم انتخاب اختیاری دو پارامتر است. این دو پارامتر، سطح اطمینان و افق زمانی (دورهٔ نگهداری) است. اما، چگونه می‌توانیم این پارامترها را تعیین کنیم؟ تعیین سطح اطمینان به اهداف ما بستگی دارد. مثلاً، اگر از VaR برای تعیین الزامات سرمایهٔ کل مؤسسه استفاده می‌کنیم، سطوح اطمینان بالا مناسب‌تر است، اما برای پس‌آزمایی، اغلب از سطوح اطمینان پایین‌تر استفاده می‌کنیم تا به یک نسبت منطقی از تخطی‌ها دست یابیم. در فصل آخر کتاب در مورد پس‌آزمایی و روش‌های آن به‌طور مفصل به بحث خواهیم پرداخت. برای تعیین حدود ریسک[1]، معمولاً سطوح اطمینان را در بازهٔ ۹۵٪ تا ۹۹٪ تعیین می‌کنیم، چراکه این سطوح اطمینان، تعداد کمی تخطی ایجاد می‌کند و در نتیجه، سرمایه‌گذاران را به جدی تلقی‌کردن حدود وادار می‌کند. وقتی از VaR برای

1. risk limits

اهداف گزارش‌دهی و یا مقایسه استفاده می‌کنیم، احتمالاً سطح اطمینان را طوری تعیین می‌کنیم که قابل‌قیاس با دیگر مؤسسات باشد. در این مورد هم سطوح اطمینان را در طیفی از ۹۵٪ تا ۹۹٪ انتخاب می‌کنیم. در نهایت، برای مدیریت ریسک داخلی، سطح اطمینان مورد استفاده برای کنترل ریسک حدود ۹۵٪ است. نمودار زیر چگونگی تغییر VaR در مقابل تغییر سطح اطمینان را به نمایش می‌گذارد. این نمودار برای یک دارایی فرضی به ارزش جاری ۱۰۰ تومان و توزیع بازدهٔ نرمال $(\sigma = 0.01, \mu = 0)$ ترسیم شده است.

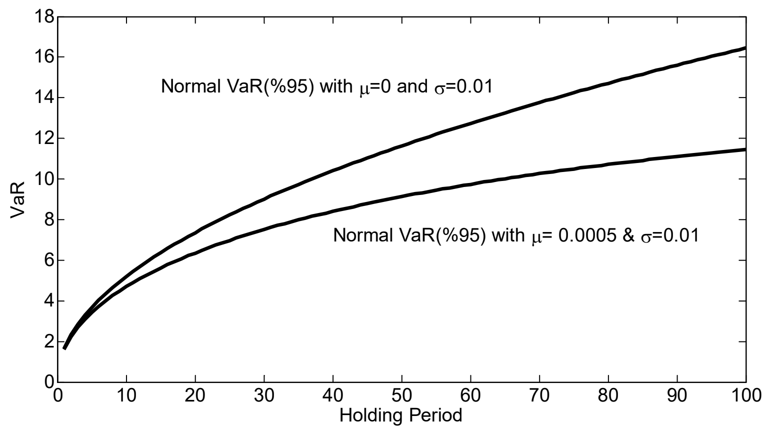


نمودار (۲-۱۵): ارزش درمعرض‌ریسک نرمال و سطح اطمینان

مطابق این نمودار، VaR نه‌تنها با افزایش سطح اطمینان افزایش می‌یابد، بلکه این افزایش همراه با نرخی افزایشی است و این نکته برای مدیریت ریسک حائز اهمیت است.

دوره‌های نگهداری رایج یک روز، یک هفته، ده روز و یک ماه است، اما مؤسسات می‌توانند دوره‌های نگهداری دیگری را نیز اختیار کنند. مثلاً، بسته به افق سرمایه‌گذاری و یا گزارش‌دهی می‌توانند از دوره‌های نگهداری سه‌ماهه و یا بیشتر نیز استفاده کنند. دورهٔ نگهداری هم‌چنین به نقدشوندگی بازارهایی بستگی دارد که مؤسسه در آن‌ها فعالیت می‌کند. دورهٔ نگهداری ایده‌آل در یک بازار خاص، مدت زمانی است که ضامن نقدشوندگی مرتب موقعیت‌ها در آن بازار باشد. دورهٔ نگهداری به نوع مؤسسه نیز بستگی دارد. افق زمانی می‌تواند از چند ساعت برای یک شرکت فعال در معاملات تا یک سال برای یک صندوق بازنشستگی باشد.

از آنجا که VaR به دورهٔ نگهداری نیز بستگی دارد، می‌توانیم تغییرات آن را در مقابل تغییرات دورهٔ نگهداری بررسی کنیم. نمودار (۲-۱۶) گویای چگونگی این تغییرات است. در این نمودار ارزش درمعرض‌ریسک نرمال را بـرای دو مقـدار اختیـاری از میـانگین و بـرای دوره‌های نگهداری متغیر از ۱ تا ۱۰۰ روز ترسیم کرده‌ایم. (ارزش جاری دارایی ۱۰۰ تومان است.)



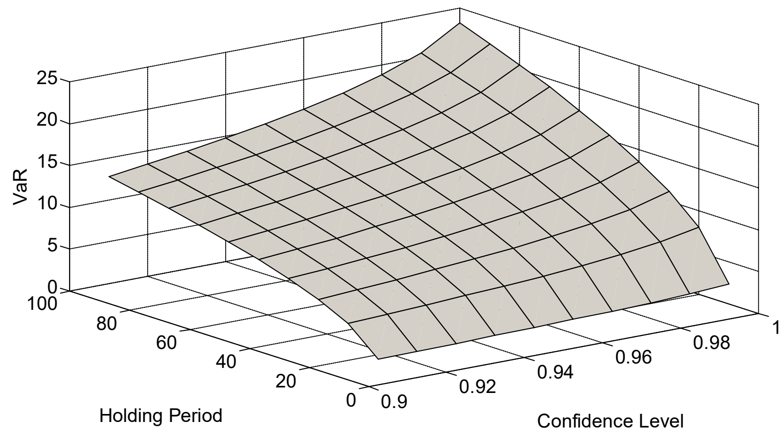
نمودار (۲-۱۶): ارزش درمعرض‌ریسک نرمال و دورهٔ نگهداری

نحوهٔ بررسی تغییرات در نمودار (۲-۱۶) بر اساس قاعدهٔ جـذر زمـان[1] اسـت. بـرای $\mu = 0$، ارزش درمعرض‌ریسک چنددوره‌ای برابر با حاصل‌ضرب ریشهٔ دوم تعداد دوره‌ها در ارزش درمعرض‌ریسک یک‌دوره‌ای است. بنابراین، ارزش درمعرض‌ریسک بـرای یـک دورهٔ صدروزه، ده برابر ارزش درمعرض‌ریسک یک‌روزه خواهد بود. برای $\mu > 0$، VaR با نـرخ کمتری افزایش می‌یابد. بدین‌ترتیب، VaR با تغییر دورهٔ نگهداری تغییـر می‌کنـد و نحـوهٔ تغییر آن به‌طرز قابل‌ملاحظه‌ای به μ بستگی دارد.

بهترین انتخاب برای پارامترهای سطح اطمینان و دورهٔ نگهداری به شرایط و اهداف ما بستگی دارد. به هر حال، کارکردن با طیفی از این پارامترها نسبت به انتخـاب یـک مقـدار برای آن‌ها، ایدهٔ خوبی به‌نظر می‌رسد. بدین ترتیب، با انتخـاب مقـادیر مختلفـی از ایـن دو

1. the rule of square root of time

پارامتر به سطوح ارزش درمعرض‌ریسک[1] دست می‌یابیم که اطلاعات بیشتری در اختیار قرار می‌دهد. نمودار (۲-۱۷) نمایان‌گر سطح ارزش درمعرض‌ریسک نرمال در بازه‌هایی از سطح اطمینان و دورهٔ نگهداری است.



نمودار (۲-۱۷): سطح ارزش درمعرض‌ریسک نرمال با توجه به سطح اطمینان و دورهٔ نگهداری

مزیت‌های ارزش درمعرض‌ریسک

اعتقاد عمومی در ادبیات مالی بر این است که VaR رویکردی جدید برای اداره و کنترل ریسک است؛ با این وجود، این سنجهٔ ریسک بسیار مورد توجه فعالان ریسک قرار گرفته و تحقیقات مفصلی جهت توسعهٔ رویکردها و افزایش دقت آن صورت گرفته است. در این‌جا سؤالی مطرح می‌شود: چرا ارزش درمعرض‌ریسک تا این حد مورد اقبال بازیگران بازار مالی قرار گرفته است؟ به عبارت دیگر، مزیت ارزش درمعرض‌ریسک نسبت به سایر سنجه‌های ریسک چیست؟

ارزش درمعرض‌ریسک با از میان‌برداشتن مفروضاتی که عموماً برای سنجش ریسک در نظر گرفته می‌شود، تخمین‌های معقول‌تری از ریسک سبد دارایی‌ها به‌دست می‌دهد،

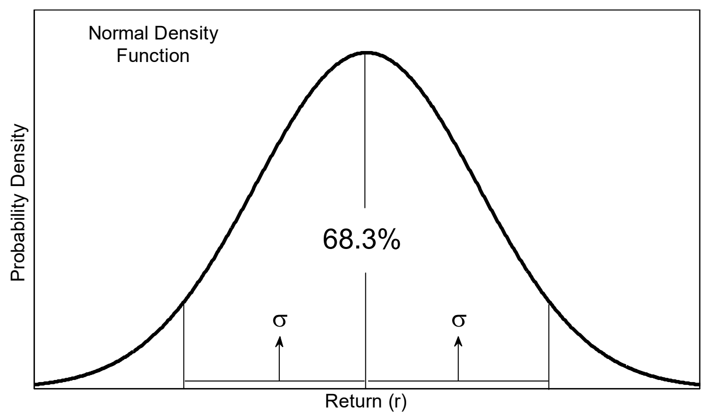
---

1. VaR surfaces

به‌طوری‌که کارآمدی آن مورد تأیید مجامع مالی قرار گرفته و جای خود را به‌عنوان سنجۀ مناسب ریسک کاملاً باز کرده است. در ادامه به بررسی علت‌های این امر می‌پردازیم.

یکی از مفروضاتی که در مورد توزیع سری بازدۀ مالی[1] در نظر گرفته می‌شود، نرمال‌بودن آن است. این درحالی است که توزیع بسیاری از سری‌های بازدۀ مالی نرمال نیست و به‌طور فراگیری دارای چولگی و کشیدگی[2] است. انحراف‌معیار و شاخص بتا برای محاسبۀ ریسک بر اساس فرض نرمال عمل می‌کند و بدین ترتیب در صورت بروز انحراف از توزیع نرمال، متحمل خطاهای قابل‌ملاحظه‌ای می‌شود.

مطابق نمودار (۲–۱۸)، چنانچه از میانگین توزیع نرمال به اندازۀ یک انحراف‌معیار به سمت چپ و راست منحرف شویم، محدودۀ حاصل حدود ۶۸ درصد از سطح زیر نمودار است. بدین ترتیب تا زمانی که توزیع ارزش سبد دارایی، نرمال باشد، انحراف‌معیار به‌عنوان سنجۀ مناسب ریسک سبد دارایی‌ها، تداعی‌کنندۀ احتمال زیان خواهد بود.



نمودار (۲–۱۸): انحراف‌معیار و تابع چگالی احتمال نرمال

اما، به محض این‌که توزیع ارزش سبد دارایی، از توزیع نرمال فاصله می‌گیرد، انحراف‌معیار کارایی خود را از دست می‌دهد. در این حالت، دیگر نمی‌توان استنباط کرد که حدود ۳۴ درصد سطح زیر نمودار در محدودۀ یک انحراف‌معیار به سمت چپ و یا راست

1. financial return series
2. leptokurtosis

میانگین قرار دارد. بنابراین، انحراف‌معیار برای توزیع‌های غیرنرمال و خصوصاً غیرمتقارن مفهوم چندانی را به ذهن متبادر نمی‌سازد و سنجهٔ مناسبی برای ریسک نیست. در این حالت، استفاده از گشتاورهای مراتب بالاتر برای شناسایی مشخصات توزیع، ضروری است.

بر این اساس، تمرکز بر معیاری برای ریسک که قادر به تلفیق هرگونه «نرمال‌نبودن» در توزیع بازدهٔ دارایی‌های مالی باشد، از مطلوبیت زیادی برخوردار است. در ارزش درمعرض‌ریسک، فرض نرمال‌بودن توزیع بازده، فرضی خاص می‌باشد و بنابراین، سنجهٔ مناسبی جهت در نظر گرفتن تأثیر توزیع‌های احتمال غیرنرمال است.

آنچه موجب نگرانی سرمایه‌گذاران می‌شود، کل تلاطم‌های ارزش دارایی نیست. تلاطم مطلوب[۱] (روبه‌بالا) هیجان‌انگیز است، اما نگران‌کننده به‌نظر نمی‌رسد. آنچه قسمت عمدهٔ نگرانی‌های سرمایه‌گذار را تشکیل می‌دهد، تلاطم نامطلوب[۲] (روبه‌پایین) ارزش سبد دارایی‌هایش می‌باشد. تمرکز بر انحراف‌معیار به‌عنوان سنجهٔ مناسب ریسک نشانگر این است که سرمایه‌گذاران به احتمال بازده‌های منفی در برابر بازده‌های مثبت وزن یکسانی می‌دهند. شواهد مکفی وجود دارد که شرکت‌ها اغلب در برابر سود و زیان به‌صورت نامتقارن[۳] رفتار می‌کنند. شواهد تجربی ارزشمندی راجع به گریز از زیان وجود دارد. بنابراین، روش میانگین–واریانس احتمالاً به استراتژی ناکارآمدی جهت بهینه‌سازی بازدهٔ موردانتظار دارایی‌های مالی و در عین حال کمینه‌کردن ریسک منجر می‌شود. در واقع، سنجه‌هایی همچون نیم‌واریانس و نیم‌بتا در ابتدا جهت اندازه‌گیری جداگانهٔ دنبالهٔ منفی توزیع ایجاد شدند، اما چون در شناسایی و ترکیب توزیع احتمال ارزش سبد دارایی در محاسبات ریسک عقیم بودند، چندان مورد اقبال قرار نگرفتند.

ارزش درمعرض‌ریسک با درک افراد نسبت به ریسک و با محدودیت‌هایی که مدیریت با آن‌ها مواجه است، تطابق بسیار بیشتری دارد، چراکه مدیر سبد دارایی یا سرمایه‌گذار راجع به کاهش ارزش سبد به پایین محدودهٔ ارزش درمعرض‌ریسک به‌شدت علاقه‌مند است. بنابراین، استفاده از ارزش درمعرض‌ریسک به‌عنوان معیار ریسک تعبیر روشنی از رفتار

1. upside volatility
2. downside volatility
3. asymmetric

سرمایه‌گذاران در کمینه‌کردن ریسک روبه‌پایین (ریسک نامطلوب) ارایه می‌دهد و بدین ترتیب از محدودیت‌های مربوط به نظریهٔ مطلوبیت موردانتظار و همچنین درجهٔ ریسک‌گریزی (که تصور می‌شود یک سرمایه‌گذار از خود بروز می‌دهد) اجتناب می‌گردد.

مسألهٔ دیگری که باعث استقبال بازیگران بازار از سنجهٔ ارزش درمعرض‌ریسک شده، افزایش عدم‌اطمینان در بازارهاست. ارزش درمعرض‌ریسک با ارایهٔ مدل‌هایی پویا و با نگاهی آینده‌نگر، به برآوردهای دقیق‌تری نسبت به سایر سنجه‌های ریسک دست می‌یابد.

پیچیده‌شدن سبد دارایی‌ها و وجود انواع ابزارهای مالی در آن‌ها، مدیران سبد را جهت اندازه‌گیری ریسک سرمایه‌گذاری‌ها با چالش بزرگی مواجه ساخته است. به‌عنوان مثال، وجود اختیارمعامله در سبد دارایی‌ها، محاسبهٔ ریسک آن را مشکل می‌نماید، به‌طوری‌که اغلب سنجه‌ها از کمّی‌کردن ریسک مربوطه عاجزند. ارزش درمعرض‌ریسک از طریق فرآیندی که شرح آن رفت، راه‌حل مناسبی ارایه می‌کند.

از مزیت‌های ارزش درمعرض‌ریسک این است که معیارهای کمّی و ترکیبی ریسک را ارایه می‌کند که به ما اجازهٔ احتساب انواع مختلف وابستگی متقابل[1] بین بازدهٔ دارایی‌ها، اثرات دنباله‌های ضخیم[2] و نرمال‌نبودن (که مثلاً از حضور اختیارمعامله و یا ریسک نکول[3] ناشی می‌شود) را می‌دهد.

یکی از مزیت‌های ارزش درمعرض‌ریسک در مقایسه با سنجه‌های سنتی ریسک نظیر بتا و دیرش این است که منعکس‌کنندهٔ هر دو مؤلفهٔ ریسک است و این در حالی است که ضریب بتا و دیرش تنها به یک مؤلفهٔ ریسک می‌پردازد. ضریب بتا حساسیت بازدهٔ سهم را نسبت به تغییرات شاخص سهام اندازه‌گیری می‌کند. این سنجه، عدم‌اطمینان موجود در تغییرات شاخص سهام را در محاسبات دخیل نمی‌کند. بدین ترتیب، ضریب بتای بالا به‌خودی‌خود نشانگر ریسک بالای سهم یا سبد سهام نیست، بلکه اهمیت آن به تغییرات

1. cross-dependence
2. fat tails
3. default risk

شاخص سهام در آینده بستگی دارد. تصور کنید سبدی با ضریب بتای بالا دارید. اگر بدانید تغییرات شاخص سهام در آینده ناچیز است، خیالتان تا حدود زیادی راحت می‌شود. بنابراین، ضریب بتا تنها مشخص می‌کند که سبد دارایی شما از ناحیهٔ تغییرات شاخص سهام، چقدر در معرض ریسک است. به عبارت دیگر، اهمیت ضریب بتا مشروط بر تغییرات شاخص سهام در آینده است. در مورد دیرش نیز وضع به همین منوال است؛ این در حالی است که ارزش درمعرض‌ریسک شامل عدم‌اطمینان مربوط به عامل ریسک نیز می‌باشد و بدین ترتیب انعکاس‌دهندهٔ هر دو مؤلفهٔ ریسک است.

ارزش درمعرض‌ریسک برای موقعیت‌ها و ریسک‌های مختلف، سنجهٔ مشترک ریسک است. ارزش درمعرض‌ریسک را می‌توان برای هر نوع سبدی به‌کار برد و این ویژگی، مقایسهٔ ریسک سبدهای مختلف را امکان‌پذیر می‌کند. به‌عنوان مثال، این سنجه امکان اندازه‌گیری ریسک مربوط به یک ورقهٔ بهادار با درآمد ثابت را فراهم می‌کند، به‌گونه‌ای که قابل‌مقایسه با ریسک یک سهم باشد. به همین دلیل، VaR بهبود قابل‌توجهی نسبت به سنجه‌های سنتی ریسک یافته است، چراکه این ویژگی کمتر در این سنجه‌ها دیده می‌شود. مثلاً، دیرش و تحدب تنها برای موقعیت‌های با درآمد ثابت به‌کار می‌روند. سنجه‌های ریسک یونانی[1] تنها برای اوراق مشتقه و نظریهٔ سبد دارایی برای سهام و موقعیت‌های مشابه مثل کالا به‌کار می‌رود.

ارزش درمعرض‌ریسک ما را در جهت تجمیع[2] ریسک موقعیت‌های فرعی[3] به ریسک کل سبد دارایی توانمند می‌سازد؛ با انجام چنین کاری، کنش‌های متقابل و همبستگی‌های میان عوامل ریسک مختلف به حساب می‌آید. این یکی دیگر از جذابیت‌های VaR می‌باشد، چراکه بیشتر سنجه‌های سنتی ریسک امکان تجمیع مشهود ریسک‌های اجزاء را فراهم نمی‌کند. در فصل دهم به‌طور مفصل به ریسک‌های اجزاء می‌پردازیم.

1. Greek risk measures
2. pooling
3. subpositions

علاوه بر این‌ها، مفهوم سادهٔ ارزش درمعرض‌ریسک، موجب جذابیت روزافزون آن شده است. درک سایر سنجه‌های ریسک همچون انحراف‌معیار، ضریب بتا و غیره طبق تعاریف آن‌ها برای اغلب سرمایه‌گذاران مشکل است. اما، تعریف سادهٔ ارزش درمعرض‌ریسک برای سرمایه‌گذاران و فعالان بازار از قابلیت درک بیشتری برخوردار است.

محدودیت‌های ارزش درمعرض‌ریسک

اغلب فعالان ریسک، VaR را به‌عنوان سنجه‌ای مناسب و جامع پذیرفته‌اند، ولی در عین حال کسانی هم هستند که در مورد مشکلات آن هشدار داده‌اند. آشنایی با محدودیت‌های VaR ما را در جهت استفادهٔ هرچه بهتر از این سنجه یاری می‌کند.

یکی از مسائل کلیدی، اعتبار مفروضات آماری VaR می‌باشد. نسیم طالب و ریچارد هوپ انتقال سادهٔ مدل‌های ریاضی و آماری از علوم فیزیکی به سیستم‌های اجتماعی را مورد انتقاد قرار داده‌اند.[1] این‌گونه کاربردها، اغلب ویژگی‌های مهم سیستم‌های اجتماعی را نادیده می‌گیرد. برخی از این ویژگی‌ها عبارت است از روش‌های یادگیری فعالان بازار و واکنش آن‌ها نسبت به محیط، غیرایستابودن[2] و وابستگی پویای بسیاری از فرآیندهای بازار و مانند این‌ها. این مسأله مقبولیت بسیاری از مدل‌ها را زیر سؤال می‌برد و برآوردهای VaR را در معرض خطاهای بزرگی قرار می‌دهد.

برخی‌ها اذعان می‌دارند که برآوردهای VaR غیردقیق می‌باشد. شواهد تجربی در این زمینه نگران‌کننده است، چراکه حاکی از تخمین‌های بسیار متفاوت مدل‌های مختلف VaR می‌باشد. بدیهی است اگر برآوردهای VaR تا این اندازه غیردقیق باشد و کاربران این برآوردها را جدی تلقی کنند، با ریسک‌های بزرگ‌تری مواجه می‌شوند. طالب اشاره می‌کند که با اتکا به اطلاعات گمراه‌کننده، نسبت به حالتی که هیچ‌گونه اطلاعاتی ندارید، در وضعیت بدتری قرار می‌گیرید. اگر به خلبانی ارتفاع‌سنجی بدهید که خوب کار نمی‌کند،

---
1. Taleb (1997a,b) and Hoppe (1998).
2. non-stationarity

احتمالاً باعث گمراهی خلبان و سقوط هواپیما خواهید شد و اگر به او چیزی ندهید، از پنجرهٔ هواپیما به بیرون نگاه می‌کند و برای کنترل هواپیما تصمیمات درست‌تری می‌گیرد.

برخی می‌گویند استفاده از VaR ممکن است همانند یک عامل فراگیر ریسک به بی‌ثباتی سیستم مالی بیانجامد. طالب می‌گوید استفاده کنندگان از VaR اغلب پوشش‌دهندگان فعالی[1] هستند که باید در مواجهه با تغییرات قیمت‌های بازار در موقعیت‌های خود تجدیدنظر نمایند. اگر همه از VaR استفاده کنند، این خطر وجود دارد که رفتار یادشده که در جهت پوشش ریسک صورت می‌گیرد، ریسک‌های ناهمبسته را بسیار همبسته نماید و بدین ترتیب شرکت‌ها بیش از برآوردهای VaR متحمل ریسک می‌شوند.

طرفداران VaR اظهار می‌کنند که بسیاری از این انتقادها مختص VaR نیست و بر بسیاری از سنجه‌های ریسک وارد است. آن‌ها همچنین این‌گونه استدلال می‌کنند که بسیاری از این مسائل به علت استفادهٔ نادرست از VaR می‌باشد.

برآوردهای VaR ممکن است متحمل ریسک مدل شود. این ریسک از مدل‌هایی ناشی می‌شود که بر مفروضات نادرستی بنا شده است. همچنین، این برآوردها ممکن است در معرض ریسک اجرا[2] قرار گیرد. این ریسک از خطاهای مربوط به نحوهٔ اجرای مدل نشأت می‌گیرد. البته، این مسائل در میان اغلب سیستم‌های اندازه‌گیری مشترک است و منحصر به سنجهٔ VaR نیست.

به هر حال VaR دارای محدودیت‌های مخصوص به خود نیز می‌باشد. محدودیت مهم سنجهٔ VaR این است که تنها درصورت عدم‌تخطی، در مورد بیشترین زیان سخن می‌گوید. مثلاً، می‌گوید در ۹۵٪ موارد زیان ما از مقدار ارزش درمعرض‌ریسک بیشتر نمی‌شود، اما در صورت رخداد تخطی انتظار داریم میزان زیان بیشتر از مقدار VaR شود و این در حالی است که VaR به خودی‌خود در مورد زیان‌های فراتر از مقدارش، چیزی برای گفتن ندارد. ناکامی ارزش درمعرض‌ریسک در احتساب چنین زیان‌هایی مسائل

1. dynamic hedgers
2. implementation risk

قابل‌ملاحظه‌ای پدید می‌آورد. به‌عنوان مثال، دو موقعیت با ارزش درمعرض‌ریسک یکسان را در نظر بگیرید. ظاهراً این دو موقعیت باید دارای ریسک یکسانی باشد. اما، به علت مسأله‌ای که تشریح نمودیم، ممکن است در معرض ریسک‌های بسیار متفاوتی قرار داشته باشند. بدیهی است این مسأله می‌تواند به پیامدهای بسیار نامطلوبی منجر شود. مثلاً، تصور کنید سرمایه‌گذاری‌ای بازدهٔ موردانتظار بالایی داشته و در عین حال متحمل زیانی بسیار بزرگ نیز باشد. اگر این زیان بزرگ بر ارزش درمعرض‌ریسک تأثیر نگذارد یعنی فراتر از VaR باشد، ممکن است تصمیمی که بر مبنای VaR اتخاذ می‌شود، بدون توجه به اندازهٔ این زیان محتمل، افراد را به سرمایه‌گذاری تشویق کند. این مسأله ارایهٔ تحلیل‌های قابل‌اتکا از ریسک و بازده را زیر سؤال می‌برد و در نتیجه سرمایه‌گذاران را در معرض زیان‌های بسیار بزرگی قرار می‌دهد.

اگر ارزش درمعرض‌ریسک به اخذ تصمیمات گمراه‌کننده از جانب سرمایه‌گذاران منجر شود، می‌تواند به مسائل نمایندگی[1] دامن بزند. این امر زمانی اتفاق می‌افتد که معامله‌گران یا مدیران ریسک مؤسسه در جهت برآوردن اهداف ریسکِ مبتنی بر ارزش درمعرض‌ریسک[2] گام برمی‌دارند. به‌عنوان مثال، وقتی معامله‌گران با یک هدف ریسک مبتنی بر VaR مواجه می‌شوند، جهت فروش اختیارمعامله‌های زیر قیمت[3] دارای انگیزه خواهند بود. فروش این اوراق در بیشتر موارد به درآمدهای بالاتر منجر می‌شود و گاهی نیز در صورت بدشانسی مؤسسه، زیان‌های بزرگی به بار می‌آورد. اگر این اختیارات خوب انتخاب شوند، پیامدهای بد چنان احتمال کمی دارند که عدم‌اثرگذاری بر VaR را تضمین می‌کنند. بدین ترتیب، معامله‌گران یا مدیران ریسک از جانب درآمدهای بالاتر و در نتیجه پاداش‌های بزرگ‌تر منتفع می‌شوند. البته، این درآمدها در حالت‌های عادی ایجاد می‌گردند و آن زمانی است که اختیارمعامله، خارج از قیمت منقضی گردد. بدین ترتیب این حقیقت که VaR حالت‌های بد را در نظر نمی‌گیرد، باعث انحراف انگیزه‌های معامله‌گران و مدیران ریسک شده و اهداف VaR و یا بسته‌های جبران خدمات مبتنی بر VaR[4] به بازیچه‌ای در

1. agency problems
2. VaR-defined risk targets
3. out of money
4. VaR-defined remuneration packages

دست آن‌ها مبدل می‌گردد. بدین ترتیب، منافع معامله‌گران و مدیران ریسک تأمین می‌شود و البته، این امر با افزایش هزینه‌های مؤسساتی همراه است که آن‌ها را استخدام کرده‌اند.

هم‌چنین، محدودیت‌های نادرستی که مراجع قانونی با توسل به VaR به بانک‌ها تحمیل می‌کنند، می‌تواند با افزایش ریسک وارد بر آن‌ها موجبات بی‌ثباتی سیستم مالی را فراهم آورد. مثلاً، تعیین سقف VaR مدیران ریسک را جهت محافظت از مؤسسه در برابر زیان‌های متوسط راهنمایی می‌کند، ولی در مورد زیان‌های بزرگی که فراتر از VaR است، هیچ انگیزه‌ای در آن‌ها ایجاد نمی‌کند. محدودیت‌های قانونی VaR ممکن است اثرات چرخه‌ای را تشدید نماید و متعاقباً بر بحران‌های مالی دامن بزند و یا حتی بازار را در معرض چنین بحران‌هایی قرار دهد.

طرفداران VaR با اقامهٔ دلایل قابل‌ملاحظه‌ای ادعا می‌کنند که برخی از مسائل مربوط به استفادهٔ قانونی از VaR به خاطر ناکارآمدی سیستم قانون‌گذاری است.

شاید جدی‌ترین محدودیت ارزش‌درمعرض‌ریسک، عدم‌برخورداری آن از ویژگی انسجام باشد. در فصل بعد، به‌طور مفصل در مورد این ویژگی به بحث خواهیم پرداخت.

بنابراین، ارزش درمعرض‌ریسک با وجود مقبولیتی که در میان فعالان ریسک پیدا کرده، سنجه‌ای تمام‌عیار نیست. بدین ترتیب، باید علاوه بر VaR سنجه‌های دیگری را نیز برای برآورد ریسک مد نظر قرار دهیم. در این راستا در فصل بعد به معرفی سنجه‌هایی می‌پردازیم که فاقد برخی از محدودیت‌های VaR است.

نتیجه‌گیری

ارزش درمعرض‌ریسک بازار حداکثر زیان سبد دارایی‌ها در سطح اطمینان معین و در یک دورهٔ نگهداری مشخص است. محاسبهٔ VaR مستلزم تکمیل فرآیندی است که شامل چهار مرحله است؛ طی این مراحل نحوهٔ محاسبهٔ VaR بدون اعمال ساده‌سازی‌های اضافی ارایه می‌شود. این فرآیند هر دو مؤلفهٔ ریسک را مد نظر قرار می‌دهد.

ارزش درمعرض‌ریسک به‌دلیل ویژگی‌هایش به سنجه‌ای استاندارد بـرای انـدازه‌گیری ریسک مؤسسات مالی تبدیل شده است. شاهد این مدعا، پیمان کمیتهٔ بال و الزام برخـی از بورس‌های اوراق بهادار مانند بورس اوراق بهادار نیویورک مبنی بر گزارش VaR بـه‌عنوان یکی از گزینه‌های افشا می‌باشد. با این‌حال، به گفتهٔ منتقدان، ارزش درمعرض‌ریسک دارای محدودیت‌هایی می‌باشد و بر آن انتقاداتی وارد است.

منابع

1. Benniga, B. (2001), *Financial Modeling Using Excel and VBA*, MIT Press, Second Edition.
2. Campbell, R., Huisman, R. and Koedijk, K. (2001), "Optimal portfolio selection in a VaR framework," *Journal of Banking and Finance*, Vol. 25, No. 9, pp. 1789-1804.
3. Dowd, D. (2005), *Measuring Market Risk*, John Wiley & Sons Ltd, Second Edition.
4. Gourieroux, C., Laurent, J. P., Scaillet, O. (2000), "Sensitivity analysis of values at risk," *Journal of Empirical Finance*, Vol. 7, No. 3, pp. 225-245.
5. Holton, G. A. (2004), *Value-at-Risk: Theory and Practice*, Academic Press.
6. Hoppe, R. (1998), "VaR and the unreal world" *Risk 11* (July), pp. 45-50.
7. Jorion, P. (2003), *Financial Risk Manager*, John Wiley & Sons Inc, Second Edition.
8. Taleb, N. (1997a), " The World according to Nassim Taleb," *Derivatives Strategy 2* (December/January), pp. 37-40.
9. Taleb, N. (1997b), " Against VaR," *Derivatives Strategy 2* (April), pp. 21-26.

فصل سوم

سنجه‌های منسجم ریسک

مقدمه

به‌طور کلی می‌توان سنجه‌های ریسک را بر اساس ویژگی انسجام[1]، در قالب دو گروه منسجم و غیرمنسجم تقسیم‌بندی کرد. در این فصل ابتدا به تشریح قواعد انسجام می‌پردازیم و ارزش درمعرض‌ریسک را از لحاظ این ویژگی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه به معرفی دیگر سنجه‌های متعلق به گروه سنجه‌های ریسک مبتنی بر صدک می‌پردازیم و ضمن بررسی انسجام، مشخصات و نحوهٔ محاسبهٔ آن‌ها را از نظر می‌گذرانیم.

قواعد انسجام[2] و کاربردهای آن

به رغم این‌که ما درکی شهودی از ریسک‌های مالی داریم، ارایهٔ تخمین کمّی از ریسک مشکل می‌نماید مگر این‌که دقیقاً منظور واقعی خود را از یک سنجهٔ ریسک مشخص کنیم. به‌عنوان مثال ما درک نامشخصی از دما داریم و بیان شفاف آن بدون توجه به دماسنج مشکل است، چراکه چگونگی اندازه‌گیری دما را نشان می‌دهد. به همین ترتیب، بیان تصورمان از ریسک بدون داشتن درک روشنی از مفهومی که از یک سنجهٔ ریسک در نظر داریم، سخت است. بنابراین، لازم است جهت طراحی و توسعهٔ سنجه‌های ریسک

1. coherence
2. coherent axioms

ویژگی‌های آن‌ها را مشخص کنیم. بر این اساس، نظریهٔ سنجه‌های منسجم ریسک[1] توسط آرتزنر و همکارانش پیشنهاد شد.[2] این، اولین نظریهٔ رسمی در زمینهٔ ریسک مالی است. این نظریه ساده به‌نظر می‌رسد، اما مفاهیم عمیقی را در خود جای داده است.

آرتزنر ویژگی‌های مطلوب سنجه‌های ریسک را در قالب قواعد انسجام بـه شـرح زیـر ارایه نمود:

اگر V را به‌عنوان مجموعه‌ای از اعداد تصادفی حقیقی در نظر بگیریم، سنجهٔ ریسـک $\rho(.)$ به‌صورت تابع زیر تعریف می‌شود:

$$\rho : V \longrightarrow \mathrm{R} \qquad (۱-۳)$$

این سنجهٔ ریسک زمانی منسجم است که ویژگی‌های زیر را برآورده نماید:

- یکنوایی[3]:

$$X, Y \in V, X \geq Y \Rightarrow \quad \rho(X) \leq \rho(Y) \quad (۲-۳)$$

به عبارتی دیگر، اگر مقادیر یک سبد دارایی (Y) در تمامی حالات ممکن اساساً کمتر از سبد دارایی دیگر (X) باشد، باید ریسک بیشتری داشته باشد.

- زیرجمع‌پذیری[4]:

$$X, Y, X+Y \in V \Rightarrow \quad \rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad (۳-۳)$$

به بیانی دیگر، ریسک یک سبد دارایی باید از مجموع ریسـک‌های مجـزا کمتـر و یـا حداقل مساوی آن‌ها باشد. یعنی ادغام ریسک‌ها نباید باعث افزایش ریسک شود.

---

1. theory of coherent risk measures
2. Artzner et al (1997-99).
3. monotonicity
4. subadditivity

- همگنی مثبت[1]:

$$X \in V, h > 0, hX \in V \Rightarrow \rho(hX) = h\rho(X) \quad (۴-۳)$$

یعنی تغییر اندازهٔ سبد دارایی با ضریب h باید سنجهٔ ریسک آن را معادل همین ضریب توزین نماید.

- عدم‌تغییر انتقالی[2]

$$X \in V, a \in \mathrm{R} \Rightarrow \rho(X + a) = \rho(X) - a \quad (۵-۳)$$

یعنی افزایش یک مقدار ثابت به مقادیر سبد دارایی باید ریسک آن را به همان اندازه کاهش دهد.

مهم‌ترین ویژگی، زیرجمع‌پذیری است. این ویژگی به ما می‌گوید که اگر سبدی متشکل از چند سبد فرعی باشد، ریسک آن بیشتر از مجموع ریسک سبدهای سازنده آن نخواهد بود و در بیشتر مواقع ریسکی کمتر از آن‌ها خواهد داشت. در واقع، زیرجمع‌پذیری مهم‌ترین معیاری است که انتظار داریم توسط یک سنجهٔ ریسک منطقی برآورده گردد. این ویژگی می‌گوید وقتی ریسک‌های انفرادی را جمع کنیم، ریسک سبد حاصل در بدترین حالت بیشتر نمی‌شود و کوچک‌تر یا مساوی مجموع ریسک‌هاست. به‌عبارتی دیگر زیرجمع‌پذیری بدین معنی است که تجمیع ریسک‌ها، ریسک کل را افزایش نمی‌دهد.

زیرجمع‌پذیری فراتر از یک مسألهٔ نظری بوده و کاربردهای عملی فراوانی دارد. عدم‌وجود این ویژگی، ما را به این نتیجه رهنمون می‌سازد که قراردادن تمامی تخم مرغ‌ها در یک سبد، در جهت مدیریت ریسک عمل مفیدی است. هم‌چنین، عدم‌ارضاء این ویژگی بدین معنی است که تجمیع ریسک‌ها منجر به تحمل ریسکی اضافی می‌شود که قبلاً وجود نداشته است. این مسأله پیامدهای نادرست زیر را به‌دنبال دارد:

---

1. positive homogeneity
2. translational invariance

سنجه‌های ریسکی که از ویژگی زیرجمع‌پذیری برخوردار نیست، مؤسسات معامله‌گر در یک بورس سازمان‌یافته را به تفکیک حساب‌هایشان بـه حسـاب‌های مجـزا جهـت ایجـاد ریسک‌های مجزا و کاهش الزامات وثیقه‌ای[1] ترغیب می‌نماید. ایـن مسـأله باعـث نگرانـی بورس می‌شود، چراکه الزامات وثیقه‌ای حسـاب‌های منفـک، دیگـر پوشـش‌دهندهٔ ریسـک مجموع آن‌ها نیست و بدین ترتیب بورس در معرض زیان‌های احتمالی قرار می‌گیرد.

اگر قانون‌گذاران جهت تعیین الزامات کفایت سرمایه از سـنجه‌های ریسـکی اسـتفاده کنند که از ویژگی زیرجمع‌پذیری برخوردار نیست، مؤسسات مالی به‌منظور کاهش الزامـات کفایت سرمایه از طریق تفکیک خود به واحـدهای مجـزا دارای انگیـزه می‌شـوند، چراکـه مجموع الزامات سرمایهٔ واحدهای کوچک‌تر از الزامات سرمایهٔ کل مؤسسه کمتر خواهد بود.

در صـورتی‌که ریسـک‌ها زیرجمع‌پـذیر باشـد، جمـع خطـی آن‌هـا تخمینـی فراتـر از ریسک‌های ترکیب‌شده[2] به‌دستمان می‌دهد و این بـدان معنـی اسـت کـه مـا می‌تـوانیم از مجموع ریسک‌ها به‌عنوان برآوردی محتاطانه از ریسک ترکیب‌شده استفاده نماییم. در ایـن حالت، ناظران همیشه مجموع ریسک‌های واحدها را به‌عنوان یک گزارش محافظه‌کارانه از ریسک تلقی می‌کنند. اما، اگر ریسک زیرجمع‌پذیر نباشد، مجموع آن‌هـا تخمینـی کمتـر از ریسک‌های ترکیب‌شده ایجاد می‌نماید، که ایـن بـدون شـک، بـرآوردی نادرسـت بـوده و ناکارآمدی این‌گونه سنجه‌های ریسک را گوشزد می‌کند.

نتیجهٔ تمامی این گفته‌ها ما را به اهمیت ویژگی زیرجمع‌پذیری واقـف می‌کنـد و ایـن مسأله، مشکلات بیشتری را پیش روی ارزش درمعرض‌ریسک قـرار می‌دهـد، چراکـه ایـن سنجه از ویژگی زیرجمع‌پذیری برخوردار نیست. یـک سـنجهٔ ریسـک زمـانی زیرجمع‌پـذیر محسوب می‌شود که شرط زیرجمع‌پذیری برای تمامی X و «Y»های ممکن، برقرار باشـد. بنابراین، با پیداکردن یک مثال نقض می‌توانیم اثبات کنیم که VaR زیرجمع‌پـذیر نیسـت. حالا به مثال زیر توجه کنید:

دو ورقهٔ قرضهٔ A و B در اختیار داریم که شبیه به هم است. احتمال نکول هرکدام ۴٪ است و با وقوع نکول زیانی معادل ۱۰۰ تومان نصیبمان می‌گـردد. بـدین ترتیـب VaR در سطح اطمینان ۹۵٪ برای هر ورق قرضه برابر صفر می‌باشد یعنی:

1. margin requirements
2. combined risks

$$VaR(A) = VaR(B) = VaR(A) + VaR(B) = 0$$

فرض کنید نکول‌ها مستقل از هم باشد. بدین ترتیب احتمال این‌که زیانی برابر صفر داشته باشیم برابر است با:

$$(0.96)^2 = 0.9216$$

و احتمال این‌که با زیانی برابر ۲۰۰ تومان مواجه شویم برابر است با:

$$(0.04)^2 = 0.0016$$

بنابراین، احتمال این‌که با زیانی به اندازهٔ ۱۰۰ تومان مواجه شویم برابر است با:

$$1 - 09216 - 0.0016 = 0.0768$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &VaR(A+B) = 100 \\ &\qquad\qquad\qquad \Rightarrow VaR(A+B) > VaR(A) + VaR(B) \\ &VaR(A) + VaR(B) = 0 \end{aligned}$$

و همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، شرط زیرجمع‌پذیری نقض می‌گردد. بر این اساس، VaR زیرجمع‌پذیر نیست. در واقع ما تنها زمانی می‌توانیم از VaR به‌عنوان یک سنجهٔ زیرجمع‌پذیر یاد کنیم که بازده دارای توزیع بیضوی باشد و این محدودیت قابل‌ملاحظه‌ای است، چراکه در دنیای واقعی توزیع‌هایی غیربیضوی، بیشتر از این‌که یک استثناء باشد، یک حالت عادی محسوب می‌شود.

ناکامی ارزش درمعرض‌ریسک در تأمین شرط زیرجمع‌پذیری مشکلی اساسی است، چراکه دیگر نمی‌توانیم از آن به‌عنوان سنجهٔ منسجم ریسک یاد کنیم. VaR تنها یک صدک است و به‌عنوان یک صدک کاربردهای خود را دارد ولی به‌عنوان یک سنجهٔ ریسک راضی‌کننده نیست.

با توجه به این مسائل، به‌دنبال جایگزین‌هایی برای VaR هستیم که هم سنجه‌هایی منسجم باشند و هم مزیت‌های VaR را در خود جای دهند و در عین حال از معایب آن

برحذر باشند. اگر انتظار داریم که این سنجه‌های جایگزین، مزیت‌های VaR را حفظ کنند، بدیهی است که باید سنجه‌هایی شبیه به VaR و منعکس‌کنندهٔ صدک توزیع بازده و یا توزیع زیان باشند. در ادامه به معرفی برخی از این گزینه‌ها یعنی ریزش موردانتظار و سنجه‌های ریسک طیفی می‌پردازیم.

ریزش موردانتظار

ریزش موردانتظار نامزد مناسبی برای سنجهٔ ریسک است. این سنجه، میانگین α یا $A\%$ از بدترین بازده‌ها و یا بدترین زیان‌هاست. برای ایجاد هم‌خوانی با VaR معمولاً مقدار VaR به‌عنوان مرز تعیین‌کنندهٔ بدترین زیان‌ها یا بازده‌ها در نظر گرفته می‌شود.

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F^{-1}(p)dp \quad (۶-۳)$$

توجه داشته باشید که مخرج، یعنی α معادل احتمال تخطی یک زیان از VaR است. رابطهٔ فوق علاوه بر ریزش موردانتظار به نام‌های ارزش درمعرض‌ریسک شرطی[1] و میانگین زیان اضافی[2] نیز معروف است. انتظار مشروط بر دنباله[3]، یا زیان موردانتظار دنباله[4] نیز دارای تعریف مشابهی است ولی اختلاف ظریفی با ریزش موردانتظار دارد.

اگر توزیع بازده یا زیان گسسته باشد، ریزش موردانتظار معادل گسستهٔ رابطهٔ (۳-۶) است. برای استخراج رابطهٔ گسستهٔ ریزش موردانتظار ابتدا تعاریفی از علائم مورد استفاده ارایه می‌کنیم.

فرض کنید نمونه‌ای به اندازهٔ n مشاهده داریم. این مشاهدات را به‌صورت $\{X_i\}_{\{i=1,\dots,n\}}$ نمایش می‌دهیم. برای به‌دست‌آوردن ریزش موردانتظار کافی است که نمونهٔ خود را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و میانگین $A\%$ از اولین مشاهدات را محاسبه نماییم. برای انجام این کار ابتدا آماره‌های ترتیبی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

1. conditional value at risk (CVaR)
2. mean excess loss
3. tail conditional expectation (TCE)
4. expected tail loss

$$X_{1,n},\ldots,X_{nn} \qquad (۷-۳)$$

که $X_{1,n} \leq \ldots \leq X_{n,n}$. بدین ترتیب می‌توانیم تعداد مشاهدات موجود در $A\%$ از کوچک‌ترین مشاهدات نمونه را با w تخمین بزنیم:

$$w=[n\alpha]=[nA\%] \quad (۸-۳)$$

که w جزء صحیح $nA\%$ می‌باشد. بدین ترتیب $A\%$ بدترین مشاهدات، تعدادی برابر w دارد. این مجموعهٔ مشاهدات را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\{X_{1,n},\ldots X_{w,n}\} \qquad (۹-۳)$$

با صرف‌نظرکردن از برخی ظرافت‌های مربوط به برآورد صدک، می‌توانیم برآوردکنندهٔ زیر را برای صدک α تعریف نماییم:

$$F^{-1}(\alpha)=X_{w,n}=-VaR \; (۱۰-۳)$$

بدین ترتیب زیان موردانتظار مربوط به $A\%$ از بدترین پیامدها (ریزش موردانتظار) را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$ES_\alpha=-\frac{\sum_{i=1}^{w}X_{i,n}}{w} \quad (۱۱-۳)$$

نشان‌دادن ویژگی زیرجمع‌پذیری برای ES کار ساده‌ای است. دو متغیر X و Y را در نظر بگیرید. ما مجموعهٔ حاصل از زوج‌های مرتب X و Y را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\{(X_i,Y_i)\}_{\{i=1,\ldots,n\}} \qquad (۱۲-۳)$$

حالا ویژگی زیرجمع‌پذیری را با روابط سادهٔ زیر اثبات می‌کنیم:

$$ES_\alpha(X+Y) = -\frac{\sum_{i=1}^{w}(X+Y)_{i,n}}{w} \le -\frac{\sum_{i=1}^{w}(X_{i,n}+Y_{i,n})}{w} = ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) \quad (۱۳-۳)$$

اثبات این‌که ریزش موردانتظار دیگر ویژگی‌های انسجام را نیز برآورده می‌سازد، کار ساده‌ای است. بنابراین، ES سنجه‌ای منسجم است.

پیش‌تر از سنجه‌ای به نام انتظار مشروط بر دنباله نام بردیم. این سنجه بسیار شبیه ES است ولی برخلاف آن از ویژگی زیرجمع‌پذیری برخوردار نبوده و بنابراین، سنجه‌ای منسجم نیست. TCE زیان موردانتظار در صورت تخطی از VaR است. به عبارتی دیگر، می‌توان گفت این سنجه، میانگین زیان است مشروط بر این‌که فراتر از VaR باشد. به زبان ریاضی داریم:

$$TCE = -E\left[X \middle| X \le -VaR\right] = -\frac{\int_{-\infty}^{-VaR} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{-VaR} f(x)dx} \quad (۱۴-۳)$$

بدیهی است که رخدادهای $\{X|X \le -VaR\}$ ممکن است احتمالی بیش از $A\%$ بدترین مشاهدات داشته باشند و این حالت زمانی ممکن می‌شود که تابع توزیع پیوسته نباشد. زمانی که تابع توزیع پیوسته است $\Pr\{X|X \le -VaR\} = \alpha$ و بنابراین، $ES_\alpha = TCE_\alpha$. ولی در حالت کلی می‌توان گفت که $ES_\alpha \ge TCE_\alpha$. برای درک بیشتر تفاوت این دو سنجه، رابطهٔ TCE_α را برای توزیع‌های گسسته به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$TCE_\alpha = -\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i I_{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} I_{x_i}} \quad (۱۵-۳)$$

که I_{x_i} تابع معرف[1] است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_{x_i} = \begin{cases} 1 & if \quad X_i \le X_{w,n} \\ 0 & if \quad X_i > X_{w,n} \end{cases} \quad (۱۶-۳)$$

مثال (۳-۱): تفاوت بین ES_α و TCE_α

فرض کنید تعداد ۱۰۰ مشاهده از توزیع سود/زیان یک دارایی در اختیار داریم. این داده‌ها پس از مرتب کردن به‌صورت زیر است:

$$-10,-9,-8,-7,-6,-6,-6,-5,\ldots,87$$

برای محاسبهٔ ریزش موردانتظار در سطح اطمینان ۹۵٪ ابتدا بر اساس رابطهٔ (۳-۸)، تعداد مشاهدات موجود در ۵٪ از بدترین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$w = [n\alpha] = [100 \times 0.05] = 5$$

و سپس ریزش موردانتظار را محاسبه می‌کنیم:

$$ES_\alpha = -\frac{\sum_{i=1}^{5} X_{i,n}}{5} = -\frac{-10-9-8-7-6}{5} = 8$$

حال به محاسبهٔ TCE می‌پردازیم. ابتدا صدک مربوط به ۵٪ از بدترین مشاهدات را استخراج می‌کنیم. این صدک پنجمین داده کوچک می‌باشد:

$$X_{w,n} = X_{5,100} = -6$$

سپس TCE را محاسبه می‌نماییم:

$$TCE_\alpha = -\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i I_{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} I_{x_i}} = -\frac{-10-9-8-7-6-6-6}{7} = 7.43$$

---

1. indicator function

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید TCE_α کوچک‌تر از ES_α می‌باشد. این حالت تنها زمانی رخ می‌دهد که تابع توزیع، گسسته باشد و در عین حال مشاهدهٔ $X_{w,n}$ دارای فراوانی بیش از یک باشد. برای محاسبهٔ ES_α می‌توانیم از رابطهٔ زیر نیز استفاده کنیم:

$$ES_\alpha = -\frac{n}{w}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i,n}\, I_{X_i} - X_{w,n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I - \frac{w}{n}\right)\right) \quad (۱۷–۳)$$

اکنون بر اساس رابطهٔ فوق مجدداً به محاسبهٔ ES_α می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} ES_\alpha &= -\frac{100}{5} \\ &\times\left(\frac{1}{100}(-10-9-8-7-6-6-6)+6\left(\frac{1}{100}(7)-\frac{5}{100}\right)\right) \\ &= 8 \end{aligned}$$

که نتیجهٔ حاصل، برابر با مقدار قبلی است.

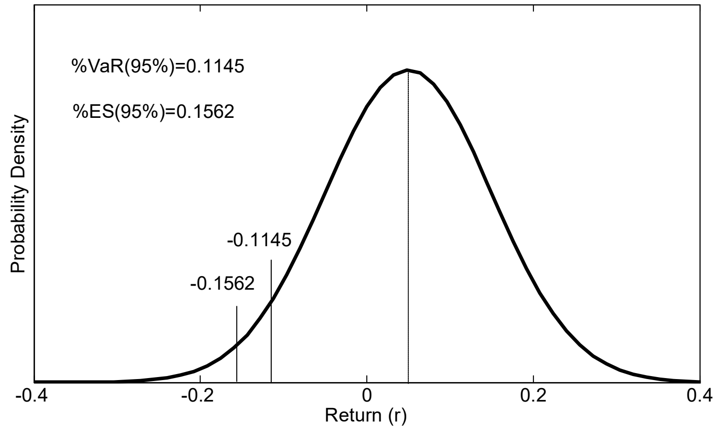
می‌توانیم رابطهٔ (۳–۱۷) را برای توابع پیوسته به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha}\left[E\left(X \middle| X \le q_\alpha(X)\right) - q_\alpha\left(\Pr\left[X \le q_\alpha(X)\right] - \alpha\right)\right] \quad (۱۸–۳)$$

و همان‌گونه که می‌دانیم:

$$q_X(\alpha) = -VaR \qquad (۱۹–۳)$$

بدیهی است که اگر به‌جای داده‌های سود/زیان از داده‌های مربوط به بازدهٔ دارایی استفاده کنیم، ریزش موردانتظار بر اساس درصد به‌دست می‌آید که به آن ریزش موردانتظار درصدی می‌گوییم و آن را با $ES\%$ نمایش می‌دهیم. در نمودار زیر، $ES\%$ با $VaR\%$ مقایسه شده است. در این نمودار مقدار $VaR\%$ برابر ۱۱/۴۹٪ و $ES\%$ برابر ۱۵/۶۲٪ است. هم VaR و هم ES به پارامترها و مفروضات توزیعی بستگی دارد و در این نمودار بر اساس سطح اطمینان ۹۵٪ و دورهٔ نگهداری یک‌روزه و فرض توزیع نرمال با میانگین ۰/۰۵ و واریانس ۰/۰۱ است.



نمودار (۳-۱): ارزش درمعرض‌ریسک و ریزش موردانتظار نرمال

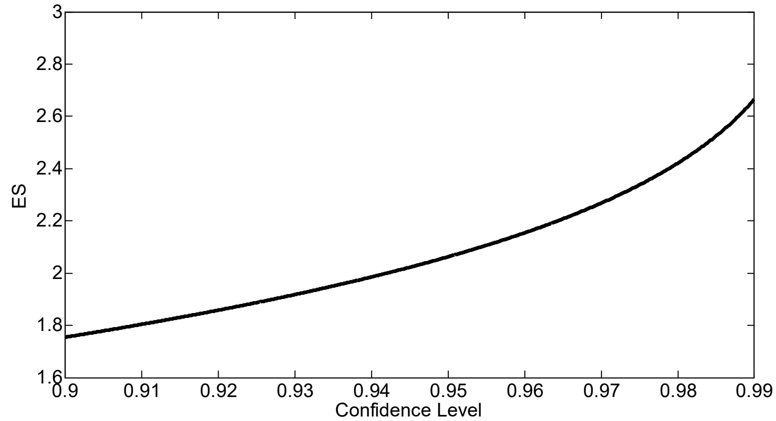
رابطهٔ ریزش موردانتظار برای تابع توزیع نرمال به‌صورت زیر است:

$$\%ES = -\left(\mu - \sigma\frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha}\right) \quad (۳-۲۰)$$

که $\%ES$ ریزش موردانتظار درصدی بـرای دورهٔ آتـی اسـت و $\phi(z_\alpha)$ مقـدار تـابع چگالی احتمال توزیع نرمال‌استاندارد به ازای مقدار z_α است. توجـه داشـته باشـید کـه در این‌جا برای جلوگیری از مداخلهٔ قیمت جاری سبد دارایـی در محاسـبات از $\%ES$ اسـتفاده نموده‌ایم. بدیهی است که حاصل‌ضرب $\%ES$ در قیمت جاری سـبد دارایـی مـا را بـه ES می‌رساند.

سطح اطمینان و دورهٔ نگهداری

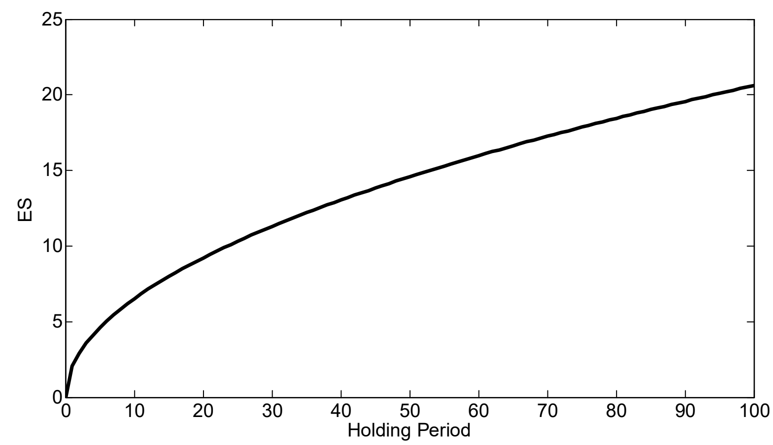
محاسبهٔ ریزش موردانتظار نیـز هماننـد VaR مسـتلزم انتخـاب اختیـاری دو پـارامتر می‌باشد. نحوهٔ انتخاب این دو پارامتر برای ES همانند آن چیزی است که در فصـل پـیش برای VaR تشریح نمودیم. در نمودار زیر منحنی سطح اطمینان ES ارایه شده است.



نمودار (۳-۲): ریزش موردانتظار و سطح اطمینان

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ES با افزایش سطح اطمینان با نرخی فزاینده، افزایش می‌یابد. این نمودار با فرض توزیع نرمال برای داده‌های سود/زیان و با مشخصات $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ ترسیم شده است.

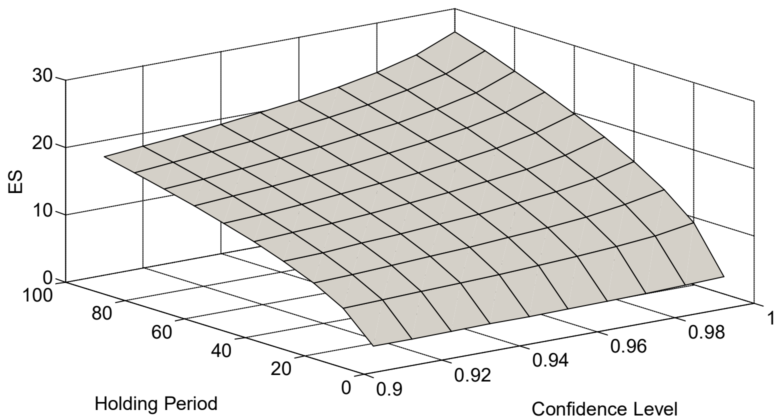
در نمودار زیر تغییرات ریزش موردانتظار نرمال بر اساس تغییرات دورهٔ نگهداری ارایـه شده است. این نمودار بر اساس مفروضات نمودار قبل ترسیم شده است.



نمودار (۳-۳): ریزش موردانتظار نرمال و دورهٔ نگهداری

بدیهی است که ES با تغییر دورهٔ نگهداری تغییر می‌کند و نحوهٔ تغییر آن به μ بستگی دارد. در این‌جا نیز همانند ارزش‌درمعرض‌ریسک، ES بر اساس قاعدهٔ جذر زمان محاسبه شده است.

در نهایت در نمودار زیر، سطح ES در یک فضای سه بعدی بر اساس دو پارامتر سطح اطمینان و دورهٔ نگهداری ارایه شده است.



نمودار (۳-۴): سطح ریزش موردانتظار با توجه به سطح اطمینان و دورهٔ نگهداری

در این‌جا نیز همانند VaR، سطح ES با افزایش سطح اطمینان و دورهٔ نگهداری افزایش می‌یابد و زمانی که این دو پارامتر به حداکثر می‌رسد، سطح ES نیز به اوج خود می‌رسد. این نمودار بر اساس توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک ترسیم شده است.

مقایسهٔ ارزش درمعرض‌ریسک و ریزش موردانتظار

ریزش موردانتظار نیز همانند ارزش‌درمعرض‌ریسک یک سنجهٔ ریسک است. این سنجه بسیاری از کاربردهای ارزش‌درمعرض‌ریسک را دارد. به هر حال ES نسبت به VaR بنا به دلایلی که در ادامه به آن‌ها می‌پردازیم، سنجهٔ ریسک کامل‌تری است:

- ریزش موردانتظار به ما می‌گوید که در حالت‌های بد چه انتظاری داشته باشیم. به‌عبارتی دیگر، این سنجه به ما می‌گوید که شرایط بد چقدر می‌تواند بد باشد در حالی‌که VaR در مورد زیان‌های فراتر از خودش حرفی برای گفتن ندارد.
- به‌طور کلّی، قاعدهٔ تصمیم‌گیری در مورد ریسک و بازدهٔ موردانتظار با استفاده از ES نسبت به VaR، معتبرتر است.
- ES منسجم است و همیشه شرط زیرجمع‌پذیری را برآورده می‌کند، در حالی‌که VaR چنین نیست. بنابراین، ES به خاطر داشتن ویژگی زیرجمع‌پذیری دارای جذابیت‌های بیشتری نسبت به VaR است.
- در نهایت ویژگی زیرجمع‌پذیری ES گویای این است که سطح ریسک سبد دارایی محدب است و این تحدب در مسأله بهینه‌سازی سبد دارایی با استفاده از ES برخلاف VaR ضامن وجود یک نقطهٔ بهینهٔ منحصر به فرد است. به‌علاوه این تحدب تضمین می‌نماید که بتوانیم مسائل بهینه‌سازی با استفاده از سنجه‌های ریسک ES را به‌نحو بسیار کارآمدی با استفاده از فنون برنامه‌ریزی خطی مرتفع کنیم.

بنابراین، ES نسبت به VaR سنجهٔ ریسک مطلوب‌تری است.

سنجه‌های ریسک طیفی

ریزش موردانتظار بهترین سنجهٔ منسجم ریسک نیست. ما قصد داریم سنجه‌های عموی‌تری را تحت عنوان سنجه‌های ریسک طیفی، معرفی کنیم. این سنجه‌ها میانگین موزون صدک‌های توزیع بازده یا توزیع زیان است. اگر M_φ را به‌عنوان سنجهٔ ریسک در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$M_\varphi = \int_0^1 \phi(p) F^{-1}(p)\,dp \quad (۲۱-۳)$$

در این رابطه، $\phi(p)$ تابع وزن‌دهی[1] است که باید آن را تعیین کنیم. این تابع به نام‌های تابع طیف ریسک[2] یا تابع ریسک‌گریزی[3] نیز معروف است.

بدین ترتیب، ES و VaR موارد خاصی از رابطهٔ فوق خواهند بود. ES با تعیین $\phi(p)$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\phi(p) = \begin{cases} 0 & if \quad p > \alpha \\ 1/\alpha & if \quad p \le \alpha \end{cases} \quad (۲۲-۳)$$

ES به بازده‌ها یا زیان‌های دنباله[4]، وزن $1/\alpha$ و به دیگر صدک‌ها وزن صفر اختصاص می‌دهد. تابع وزن‌دهی VaR به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(p) = \begin{cases} 0 & if \quad p \ne \alpha \\ 1 & if \quad p = \alpha \end{cases} \quad (۲۳-۳)$$

VaR تنها یک صدک است و به صدک α وزن یک و به دیگر صدک‌ها وزن صفر اختصاص می‌دهد. بدین ترتیب، سنجهٔ VaR به بازده‌ها یا زیان‌های مربوط به دنباله، وزن یکسان صفر اختصاص می‌دهد.

برای معرفی گروه وسیع‌تری از سنجه‌های منسجم ریسک، باید بدانیم که تابع وزن‌دهی تحت چه شرایطی سنجهٔ منسجم ریسک ایجاد می‌کند. پاسخ این سؤال در طبقه‌ای از سنجه‌های منسجم ریسک نهفته است که تابع وزن‌دهی آن‌ها شرایط زیر را برآورده نماید:

- نامنفی بودن[5]: تابع وزن‌دهی در بازهٔ $[0,1]$ نامنفی باشد. یعنی:

$$\phi(p) \ge 0 \quad , p \in [0,1] \quad (۲۴-۳)$$

---

1. weighting function
2. risk spectrum function
3. risk-aversion function
4. tail losses
5. non-negativity

- نرمال‌سازی[1]: سطح زیر منحنی تابع وزن‌دهی برابر یک باشد. یعنی:

$$\int_0^1 \phi(p)dp = 1 \qquad (۲۵-۳)$$

- فزایندگی ضعیف[2]: اگر یک زیان بزرگ‌تر از زیان دیگر باشد، باید وزنی بیشتر یا مساوی آن داشته باشد. به‌عبارتی دیگر، بازده‌های کوچک‌تر باید اوزانی بزرگ‌تر یا مساوی بازده‌های بزرگ‌تر داشته باشند.

مطابق دو شرط اول، اوزان باید مثبت و مجموع آن‌ها برابر یک باشد. اما شرط سوم، اساسی است. این شرط بیانگر ریسک‌گریزی است و مطابق آن اوزان اختصاصی به زیان‌های بزرگ باید بزرگ‌تر و یا حداقل برابر اوزان مربوط به زیان‌های کوچک‌تر باشد. این شرط، انسجام را تضمین می‌کند.

بر این اساس، اوزان انتصابی به زیان‌ها در سنجه‌های ریسک طیفی، مستقیماً نمایانگر ریسک‌گریزی افراد است. اگر فردی دارای یک تابع ریسک‌گریزی عادی باشد، این اوزان، افزایشی خواهد بود. نرخ رشد اوزان نیز به درجهٔ ریسک‌گریزی وی بستگی دارد. اگر فردی ریسک‌گریزتر باشد، اوزان با سرعت بیشتری رشد می‌کند.

رابطهٔ بین $\phi(p)$ و ریسک‌گریزی، عدم‌کفایت ES و VaR را با وضوح بیشتری مشخص می‌کند. قبلاً گفتیم که ES به تمامی زیان‌ها یا بازده‌های موجود در ناحیهٔ دنباله، وزن یکسانی اختصاص می‌دهد. اگر این اوزان را انعکاس‌دهندهٔ نحوهٔ رفتار افراد در مواجهه با ریسک تعبیر کنیم، بدان معنی است که فرد درمورد پیامدهای ناحیهٔ دنباله، بی‌تفاوت به ریسک[3] است و این با فرض ریسک‌گریزی افراد ناسازگار است. بدین ترتیب ES به رغم انسجام، سنجهٔ کاملی برای ریسک نیست. اگر فردی ریسک‌گریز باشد، تابع وزن‌دهی او برای زیان‌های بزرگ‌تر وزن بیشتری را در نظر می‌گیرد.

این استدلال در مورد VaR نیز صادق است. VaR یک وزن بسیار بزرگ (یعنی یک) را به صدک α نسبت می‌دهد و هیچ وزنی را برای زیان‌های بزرگ‌تر در نظر نمی‌گیرد.

---

1. normalization
2. weakly increasing
3. risk- neutral

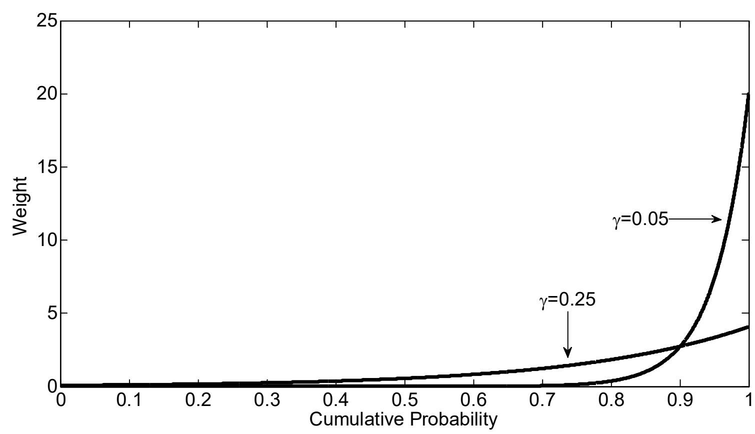
این مسأله گویای ریسک‌دوستی[1] افراد است. با اختصاص وزن صفر به زیان‌های بزرگ‌تر، VaR عدم‌ریسک‌گریزی شدید افراد را نشان می‌دهد. VaR به زیانی که معادل خودش است، وزن بزرگی می‌دهد و تمامی زیان‌های فراتر از خودش را نادیده می‌گیرد. پس جای تعجب نیست که این سنجه نیز مشکلات خودش را دارد.

برای استخراج یک سنجهٔ طیفی ریسک، هر فردی باید تابع ریسک‌گریزی خود را تعیین کند. این فرآیند، ذهنی است، اما می‌توان آن را با ادبیات اقتصادی مربوط به نظریهٔ تابع مطلوبیت[2] راهنمایی کرد. یک مثال در این زمینه، تابع ریسک‌گریزی نمایی[3] است:

$$\phi_\gamma(p) = \frac{\exp\left(-(1-p)/\gamma\right)}{\gamma\left(1-\exp\left(-1/\gamma\right)\right)} \quad (۲۶-۳)$$

که p احتمال تجمعی است و $\gamma \in (0,\infty)$ انعکاس‌دهندهٔ درجهٔ ریسک‌گریزی است. مقادیر کوچک‌تر γ نشانگر درجهٔ ریسک‌گریزی بیشتر است. این تابع، شرایط مورد نیاز برای یک سنجهٔ ریسک طیفی را برآورده می‌کند ولی از جهت دیگری نیز جذاب است، چراکه تابعی ساده و تک‌پارامتری است.

تابع ریسک‌گریزی نمایی بر اساس دو مقدار از γ در نمودار زیر ارایه شده است.



نمودار (۳-۵): اوزان طیفی-نمایی

1. risk loving
2. utility-function theory
3. exponential risk-aversion function

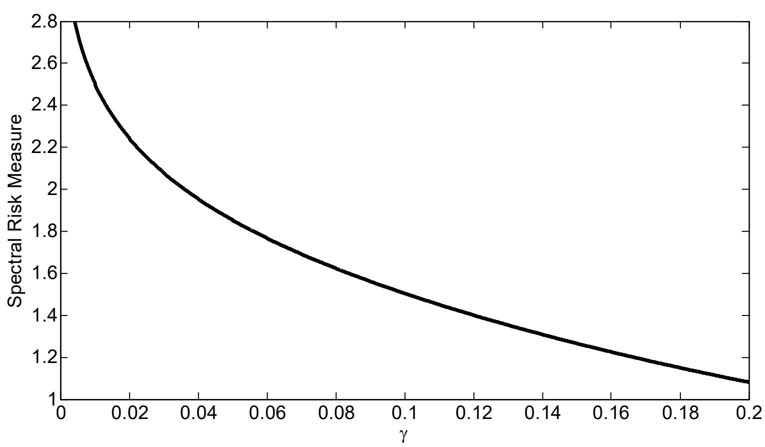
این نمودار نشان می‌دهد که چگونه اوزان با افزایش احتمال تجمعی یا همان سطح اطمینان افزایش می‌یابد. هم‌چنین نشان می‌دهد که نرخ افزایش اوزان به γ بستگی دارد. هرچه فرد ریسک‌گریزتر باشد با افزایش زیان‌ها، اوزان با سرعت بیشتری رشد می‌کند.

برای به‌دست‌آوردن سنجهٔ ریسک طیفی با استفاده از تابع وزن‌دهی نمایی، یک مقدار برای γ در نظر می‌گیریم و تابع وزن‌دهی نمایی را در رابطهٔ (۳-۲۱) جایگزین می‌کنیم:

$$M_{\phi} = \int_0^1 \phi(p)F^{-1}(p)dp = \int_0^1 \frac{\exp-\left[(1-p)/\gamma\right]}{\gamma\left[1-\exp-\left(1/\gamma\right)\right]}F^{-1}(p)dp \quad (۲۷\text{-}۳)$$

بنابراین، می‌توان گفت که سنجهٔ طیفی-نمایی[1]، میانگین موزون صدک‌هاست و اوزان آن با تابع ریسک‌گریزی نمایی تعیین می‌شود. این سنجه را می‌توان با استفاده از یک روش انتگرال‌گیری عددی مناسب برآورد نمود.

می‌توانیم از طریق رسم نمودار M_{φ} در مقابل γ چگونگی تغییر سنجهٔ ریسک طیفی-نمایی را در برابر تغییرات درجهٔ ریسک‌گریزی مشاهده کنیم. همان‌طور که در نمودار زیر مشاهده می‌کنید با کاهش γ، M_{φ} افزایش می‌یابد.



نمودار (۳-۶): تغییرات سنجهٔ ریسک طیفی-نمایی نسبت به درجهٔ ریسک‌گریزی

1. spectral-exponential measure

توجه کنید که شکل این منحنی تقریباً برخلاف منحنی تشریح‌کنندهٔ تغییرات VaR در مقابل سطح اطمینان (نمودار (۲–۱۵)) است و این مسأله به ما می‌گوید کـه پـارامتر γ در سنجهٔ ریسک طیفی، نقشی برخلاف سطح اطمینان در VaR بازی می‌کند.

تمامی این مسائل گویای این است که برای هر فرد یک سنجهٔ ریسـک بهینـه وجـود دارد و این سنجه به تابع ریسک‌گریزی وی بستگی دارد. دو نفر ممکن است سـبد دارایـی مشابهی داشته باشند، اما ریسک آن‌ها بر اساس سنجه‌های منسـجم ریسـک تنهـا زمـانی یکسان است که ریسک‌گریزی یکسانی نیز داشته باشند. این گفتـه از جنبـه روش‌شناسـی بدین معناست که ریسک یک عنصر ذهنی در خود دارد. ممکن است فـردی بـا اشـاره بـه توالی احتمالات در توزیع احتمال به ما بگوید احتمالات عینی است و برای همه صادق است ولی وقتی وارد سنجه‌های ریسک می‌شویم، هیچ سنجه‌ای وجود ندارد که برازندهٔ تمام افراد باشد. این موضوع هم‌چنین نشان می‌دهد که قانون‌گذاری اثربخش در مورد ریسـک بسـیار مشکل است، چراکه قانون‌گذاران نمی‌توانند اثر قوانین را بـدون در نظـر گـرفتن اطلاعـات ذهنی پیش‌بینی نمایند و البته این‌گونه اطلاعات به سختی حاصل خواهد شد.

نتیجه‌گیری

ارزش درمعرض‌ریسک جای خود را به‌عنوان ابزار مناسب اندازه‌گیری ریسک باز کـرده است و با وجود انتقادهای وارد بر آن، در زمینهٔ قانون‌گذاری نیز سـنجه‌ای اسـتاندارد بـرای تعیین الزامات کفایت سرمایهٔ مؤسسات مالی است. به رغم این‌که شـواهد تجربـی فراوانـی دال بر کارایی VaR در پیش‌بینی ریسک وجود دارد، به‌لحاظ نظری دارای نقطه‌ضعف‌هایی است که مهم‌ترین آن عدم‌انسجام است. ریزش موردانتظار سنجه‌ای اسـت کـه از ویژگـی انسجام برخوردار بوده و بنابراین نسبت به VaR از اعتبار بیشتری برخوردار است. در نهایت، سنجه‌های ریسک طیفی که تعمیمی از ES است، به‌دلیل توجـه بـه درجـهٔ ریسـک‌گریزی افراد در محاسبات ریسک حداقل به‌لحاظ نظری بسیار جذاب است؛ با وجود این‌که کمتـر از این سنجه‌ها استفاده می‌شود، می‌توان از آن‌ها به‌عنوان کامل‌ترین سنجه‌های ریسـک یـاد کرد.

منابع

1. Acerbi, C. and Tasche, D. (2001), "Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk," *Economic Notes*, Vol. 31, No. 2, pp. 1-10.
2. Acerbi, C. and Tasche, D. (2002), "On the coherence of expected shortfall," *Journal of Banking and Finance*, Vol. 26, No. 7, pp. 1487-1503.
3. Artzner, P., Delbean, F., Eber, J.-M., and Health, D. (1998), "Coherent measures of risk," *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, pp. 203-228.
4. Artzner, P., Delbean, F., Eber, J.-M., and Health, D. (1998), "Thinking coherently,"*Risk 10* (Nonember), pp. 68-71.
5. Dowd, K (2005) *Measuring Market Risk*, John Wiley & Sons Ltd, Second Edition.
6. Giorgi, E. D. (2002), "A note on portfolio selection under various risk measures," *Institute for Empirical Research in Economics*, University of Zurich, Working paper series, ISSN 1424-0459.
7. Jorion, P. (1997), *Financial Risk Manager Handbook*, John Wiley and Sons Inc, Second Edition.

فصل چهارم

مدل‌سازی ریسک

مقدمه

در فصل دوم، به بررسی فرآیند محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک پرداختیم و گام‌های محاسبهٔ این سنجهٔ ریسک را تشریح کردیم. درواقع، این فرآیند شکل ایده‌آل محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک است. در این فرآیند، طی مراحل مختلف، تصمیمات زیادی باید گرفته شود. مثلاً، در مرحلهٔ شناسایی عوامل ریسک باید در مورد انتخاب عوامل ریسکی که سبد دارایی‌هایمان را متأثر می‌سازد، تصمیم‌گیری کنیم. در فرآیند استنباط باید در مورد توزیع برازندهٔ بردار کلیدی ریسک اظهار نظر نماییم و در فرآیند انتقال باید در مورد به‌کارگیری یک تکنیک مناسب، اندیشه کنیم. در واقع، این فرآیند هیچ نسخهٔ تجویزشده‌ای را برای محاسبهٔ VaR ارایه نمی‌دهد و به ما جهت تصمیم‌گیری در مراحل مختلف آزادی عمل می‌دهد. بدین ترتیب پاسخ‌های به‌دست آمده از کاربران مختلف ممکن است تفاوت زیادی داشته باشد، چراکه پیاده‌سازی آن تا حدودی بر اساس قضاوت‌های افراد است.

رویکردهای ارزش درمعرض‌ریسک، نسخه‌های تجویزشده‌ای است که نحوهٔ طی‌کردن این فرآیند را دیکته می‌کنند. این رویکردها به‌سادگی و با در نظرگرفتن مفروضاتی خاص، مدلی در اختیار می‌گذارند و کمتر مجالی برای تصمیم‌گیری قائل می‌شوند. بدیهی است که با افزایش پیچیدگی‌های سبد دارایی، دیگر نمی‌توان به این رویکردها اکتفا کرد و ارایهٔ برآورد دقیقی از VaR مستلزم طی کامل فرآیند است.

برای تشریح رویکردهای ارزش درمعرض‌ریسک به مفاهیم و ابزارهایی خاص نیازمندیم. در این فصل ابتدا به معرفی مفاهیم و ابزارهای لازم برای مدل‌سازی ریسک

می‌پردازیم و در نهایت تنها به معرفی رویکردهای ارزش درمعرض‌ریسک اکتفا مـی‌کنیم و بستر را برای ورود به فصل‌های بعدی مهیا می‌نماییم. این فصل در واقع همانند پل ارتباطی بین فصل‌های گذشته و فصل‌های بعدی عمل می‌کند، چراکه با مطالعهٔ آن از طرفـی درک بهتری نسبت به فصل‌های قبلی پیدا می‌کنید و از طرفی دیگر، آمـادهٔ ورود بـه فصـل‌های بعدی می‌شوید.

توزیع شرطی[1] در مقابل توزیع غیرشرطی[2]

استقلال زمانی بازدهٔ دارایی‌ها همیشه ذهن فعالان ریسک را به خود مشـغول سـاخته است. اگر شکل‌گیری بازده‌ها در طی زمان از یکدیگر مستقل باشد، یا به‌عبارتی اگـر بـازدهٔ امروز بدون وابستگی به بازدهٔ روزهای قبل حاصل شود، می‌توانیم توزیعی غیرشرطی را بـه آن نسبت دهیم. در این‌صورت این توزیع برای تمامی بازده‌ها، مستقل از زمان شـکل‌گیری آن‌ها صادق است. بنابراین، تا زمانی که حوادث اساسی مثل بروز بحران در بازارهای مالی، فرآیند زیربنایی شکل‌گیری بازده‌ها را تحت تأثیر قرار ندهد، می‌توانیم پارامترهای تخمینـی توزیع غیرشرطی را به آن نسبت دهیم و بر این اساس، به محاسبهٔ ریسک اقـدام کنـیم. در صورت تغییر این فرآیند نیز می‌توان با بررسی داده‌ها، توزیع غیرشرطی دیگری را به آن‌هـا نسبت داد.

حال فرض کنید با فرض استقلال زمانی بازده‌هـا، توزیـع نرمـال را بـه آن‌هـا نسـبت داده‌ایم. بر این اساس، بازده دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 خواهد بود:

$$r \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad (۱-۴)$$

این بدان معناست که بدون توجه به اندازهٔ بازده و تلاطم‌های بازدهٔ امـروز و روزهـای قبل، بازدهٔ فردا دارای توزیع نرمال با همین پارامترهاست. این در حالی است کـه تحقیقـات برروی سری بازدهٔ مالی، وجود همبستگی تلاطم‌ها را به اثبات رسانده است. این تحقیقـات

1. conditional distribution
2. unconditional distribution

نشان می‌دهد که تلاطم‌های بازده تمایل به تشکیل خوشه[1] دارند و از همبستگی قابل‌توجهی برخوردارند. این بدان معناست که تلاطم‌های بالای امروز به احتمال قابل‌توجهی به فردایی پرتلاطم منجر خواهد شد. بنابراین، استفاده از توزیع‌های غیرشرطی برای سری بازدهٔ مالی منطقی به‌نظر نمی‌رسد. البته، برای برخی داده‌ها استفاده از توزیع‌های غیرشرطی بسیار معقول است و این امر زمانی روی می‌دهد که داده‌ها دارای وابستگی زمانی نباشد. به‌عنوان مثال داده‌های مربوط به وزن نوزادان به‌هنگام تولد از این نوع می‌باشد. از آنجا که وزن نوزادان متولدشده در هر دوره مستقل از دیگر دوره‌هاست، می‌توان با انتخاب یک نمونهٔ مناسب، یک توزیع غیرشرطی را به آن‌ها نسبت داد، به‌طوری‌که پارامترهای آن به‌نحو مطلوبی پاسخ‌گوی نحوهٔ توزیع وزن متولدین خواهد بود.

بر این اساس، برای داده‌هایی که دارای وابستگی زمانی است، می‌توانیم از یک توزیع شرطی استفاده کنیم و بدین ترتیب برای هر دوره، مشروط بر اطلاعات موجود تا دورهٔ قبل توزیعی در نظر بگیریم. این توزیع‌های شرطی در واقع منعکس‌کنندهٔ بار اطلاعاتی موجود در اخبار جدید است. اخبار جدید باعث ایجاد تلاطم‌های جدید می‌شود و این تلاطم‌ها به شکل‌گیری توزیع‌های جدیدی می‌انجامد. بدیهی است که دراین‌صورت با گذشت هر دوره، توزیع احتمال متغیر تصادفی، شکل جدیدی به خود می‌گیرد و تناسب توزیع هر دوره برای دوره‌های قبلی و بعدی زیر سؤال می‌رود.

برای درک بیشتر فرض کنید بازده‌های روزانهٔ یک دارایی (r_t) از فرآیندی تصادفی (ε_t) حاصل شده‌اند و این فرآیند تصادفی از یک توزیع منتخب تبعیت می‌کند. بدیهی است که باید چگونگی وابستگی بازده‌ها به این فرآیند را مشخص کنیم. در ساده‌ترین حالت می‌توانیم این دو را برابر یکدیگر در نظر بگیریم:

$$r_t = \varepsilon_t \qquad (۲-۴)$$

اکنون یک توزیع فرضی به ε_t نسبت می‌دهیم:

$$\varepsilon_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2) \qquad (۳-۴)$$

1. cluster

در عمل، μ_t را اغلب برای دوره‌های کوتاه‌مدت (مثلاً، دوره‌های یک‌روزه) صفر در نظر می‌گیرند و σ_t را برای هر دوره با استفاده از روش‌های مناسبی (که در همین فصل توضیح می‌دهیم) برآورد می‌کنند. بدین ترتیب σ_t از یک روز به روز دیگر تغییر می‌کند. در این حالت می‌توانیم بگوییم r_t دارای توزیع نرمال شرطی است و کلمه شرطی به وابستگی این توزیع به μ_t و σ_t اشاره دارد. هم‌چنین می‌توان گفت که بازده‌های استانداردشده دارای توزیع نرمال‌استاندارد است:

$$\frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} = z \sim N(0,1) \Rightarrow r_t = \mu_t + \sigma_t z \quad (۴-۴)$$

بنابراین، صدک آلفای این توزیع برابر است با:

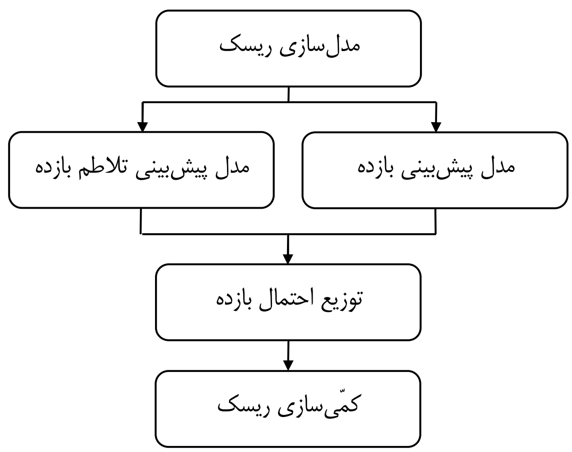
$$q_{r_t}(\alpha) = \mu_t + \sigma_t z_\alpha \quad (۵-۴)$$

روابط (۴-۴) و (۴-۵) به ما می‌گوید r_t دارای توزیع نرمال شرطی است. برای درک بیشتر، توجه کنید که r_t بر اساس یک فرایند اخلال نرمال (ε_t) تولید شده است. بنابراین، به استثنای یک حالت خاص که در آن μ_t و σ_t در طی زمان ثابت است، r_t به‌خودی خود نرمال نخواهد بود. r_t تنها مشروط بر μ_t و σ_t نرمال است. یعنی توزیع r_t به رفتار μ_t و σ_t بستگی خواهد داشت و این دو هم معمولاً متغیر تصادفی اند.

فرآیند مدل‌سازی ریسک

در میان تعاریف متعددی که از ریسک ارایه شده یکی از آن‌ها از ویژگی خاصی برخوردار است: «ریسک احتمال تفاوت بازدهٔ واقعی از بازدهٔ موردانتظار است». ویژگی منحصر به فرد این تعریف آن است که دیدگاه نسبتاً واضحی جهت کمّی‌سازی ریسک ارایه می‌دهد. بر اساس این تعریف، برای اندازه‌گیری ریسک ابتدا باید انتظار خود را از بازده‌های آتی مشخص کنیم و سپس احتمال تفاوت بازدهٔ واقعی از این بازدهٔ موردانتظار، یعنی تلاطم بازده را برآورد کنیم. گاهی اوقات عدد ثابتی را به‌عنوان بازدهٔ موردانتظار در نظر می‌گیریم. این عدد می‌تواند میانگین بازدهٔ دارایی در طول یک دورهٔ بلندمدت باشد. به همین ترتیب می‌توان تلاطم بلندمدت دارایی را نیز به‌عنوان تلاطم آتی بازده درنظر گرفت و به‌دنبال آن

ریسک دارایی را بر اساس یک توزیع بازدهٔ غیرشرطی به‌دست آورد. با تغییر شرایط، انتظارات تغییر می‌کنند و بنابراین، باید پویایی‌های بازدهٔ دارایی را جهت تعیین بازدهٔ موردانتظار در نظر گرفت. از طرفی دیگر، همان‌گونه که گفتیم، تلاطم‌های بازده در طول زمان به‌هم وابسته‌اند و بدین ترتیب مرتبط‌ساختن یک توزیع غیرشرطی به بازدهٔ دارایی‌ها راه‌حل مناسبی به‌نظر نمی‌رسد. این مسأله ما را بر آن می‌دارد که برای پیش‌بینی بازده و تلاطم‌های آن، مدل‌هایی پویا ارایه دهیم. هدف از توسعهٔ چنین مدل‌هایی، پیش‌بینی بازده و تلاطم‌های آتی آن است. بنابراین، مدل‌سازی ریسک، جورچینی است که دو بخش دارد. پیش‌بینی بازده‌ها و پیش‌بینی تلاطم‌ها. با کنار هم قرارگرفتن این دو بخش، جورچین ما کامل می‌شود و امکان کمّی‌سازی ریسک فراهم می‌آید، چراکه این دو تصویری از توزیع احتمال بازدهٔ دارایی در اختیار می‌گذارند. نمودار زیر به‌خوبی گویای این مسأله است.



نمودار (۴-۱): فرآیند مدل‌سازی ریسک

با در اختیارداشتن توزیع احتمال شرطی بازدهٔ دارایی، امکان برآورد ریسک هر دوره مشروط بر اطلاعات موجود تا دورهٔ قبل و بر اساس سنجهٔ ریسک موردنظر (مثلاً، VaR) فراهم می‌آید. در ادامه به معرفی و تشریح مهم‌ترین و متداول‌ترین مدل‌های پیش‌بینی بازده و تلاطم بازده می‌پردازیم.

مدل‌های پیش‌بینی بازده

رسالت یک مدل اندازه‌گیری ریسک، مشخص‌نمودن تغییرات آتی در ارزش سبد دارایی است. این وظیفه غالباً از طریق پیش‌بینی تغییرات آتی قیمت هرکدام از ابزار موجود در سبد دارایی انجام می‌گیرد. در این راستا، اغلب از تغییرات گذشته برای ارایهٔ این پیش‌بینی‌ها استفاده می‌شود.

مدل‌های متعددی بر پایهٔ نظریه‌های دانش اقتصاد و مالی توسعه یافته‌اند که در هرکدام سعی بر این است تا بر اساس مفروضاتی، بازدهٔ دارایی‌ها پیش‌بینی شود. در برخی از این مدل‌ها از متغیرهای برون‌زا[1] جهت پیش‌بینی بازدهٔ آتی دارایی‌ها استفاده می‌شود. این متغیرهای برون‌زا همان عوامل ریسک است و بنابراین، چنین مدل‌هایی نگاشتی برای بازدهٔ دارایی‌ها فراهم می‌آورد. مدل‌های تک‌شاخصی و چندعاملی در این طبقه جای می‌گیرد. در برخی دیگر از این مدل‌ها، تنها از متغیرهای درون‌زا[2] جهت پیش‌بینی بازدهٔ دارایی‌ها استفاده می‌شود. در واقع در این مدل‌ها فرض بر این است که بازده‌های دارایی در طی زمان از یکدیگر مستقل نیست. مدل‌های خودرگرسیونی میانگین متحرک[3] در این طبقه جای می‌گیرد. در این‌گونه مدل‌ها، پویایی‌های موقت بازده، یعنی نحوهٔ شکل‌گیری بازده در طی زمان مدل‌سازی می‌شود.

در این بخش، مروری بر برخی مدل‌های مالی و اقتصادی خواهیم داشت که جهت پیش‌بینی بازدهٔ دارایی‌ها توسعه یافته‌اند. اغلب مدل‌هایی که در این‌جا معرفی می‌شود، مدل‌های شرطی است. به همین دلیل گاهی به آن‌ها مدل‌های میانگین شرطی[4] می‌گویند.

مدل گشت تصادفی[5]

یک گروه از مدل‌های بسیار رایج که شکل‌گیری بازدهٔ قیمت‌ها را تشریح می‌کند، بر این اساس است که روند قیمت‌های مالی از فرآیند گشت تصادفی[6] تبعیت می‌کند. در این

1. exogenous
2. endogenous
3. autoregressive moving average (ARMA)
4. conditional mean models
5. random walk model
6. random walk process

مدل فرض می‌شود که رفتار قیمت یک ورقهٔ بهادار را در هر دوره می‌توان توسط رابطهٔ زیر ارایه کرد:

$$\ln(P_t) = \mu_t + \ln(P_{t-1}) + \varepsilon_t \Rightarrow r_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (۴-۶)$$
$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

که:

P_t: قیمت در پایان دورهٔ t

μ_t: میانگین بازدهٔ دورهٔ t

P_{t-1}: قیمت در پایان دورهٔ t-1

ε_t: متغیر تصادفی دورهٔ t ، دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ_t^2

r_t: بازدهٔ دارایی در دورهٔ t

این مدل بیان می‌کند که بازدهٔ ورقهٔ بهادار در هر دوره، برابر است با میانگین بازدهٔ آن دوره به‌علاوه یک متغیر تصادفی. برای این متغیر می‌توان توزیعی را در نظر گرفت که عموماً نرمال است، اما می‌توان سایر توزیع‌ها را نیز به آن نسبت داد. برای دست‌یابی به پیش‌بینی‌های بازده برای هر دوره، باید پارامترهای آن را برآورد کنیم. پارامتر μ_t را می‌توان از طریق میانگین بازده‌های دوره‌های قبلی برآورد نمود و یا می‌توانیم میانگین بازده در طی دورهٔ قبل را به‌عنوان برآوردی از این پارامتر در نظر بگیریم. برای برآورد پارامتر σ_t^2 نیز می‌توانیم از یکی از مدل‌های پیش‌بینی تلاطم که در بخش بعدی ارایه می‌گردد، استفاده کنیم. با برآورد این دو پارامتر، تصویر کاملی از توزیع بازدهٔ دارایی در دورهٔ t در اختیارمان قرار می‌گیرد و بدین‌ترتیب برآورد ریسک در این دوره امکان‌پذیر می‌گردد. هرچند که شکل‌گیری این مدل بر اساس متغیرهای درون‌زاست و از عوامل ریسک برای تشریح نحوهٔ شکل‌گیری بازده استفاده نشده است، می‌توانیم آن را به‌عنوان نگاشتی از بازدهٔ دارایی در نظر بگیریم. بدیهی است که بازدهٔ موردانتظار برابر است با:

$$E(r_t) = \mu_t \qquad (۴-۷)$$

این رابطه، یک رابطهٔ شرطی است، چراکه بازدهٔ موردانتظار دورهٔ t بر اساس اطلاعات موجود تا زمان t-1 (در این‌جا بازده‌های موجود تا زمان t-1) محاسبه می‌شود. در چنین مدل

ساده‌ای، خصوصاً زمانی که اندازهٔ نمونه بزرگ باشد، اطلاعات هر دوره تأثیر بسیار ناچیزی بر بازدهٔ موردانتظار دورهٔ بعد بر جای می‌گذارد. بنابراین، در عمل می‌توان رابطهٔ (۴-۶) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد تا به یک مدل غیرشرطی دست یافت.

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \qquad (۴-۸)$$

در این رابطه، بازدهٔ هر دوره از یک جزء ثابت (μ) و یک جزء تصادفی (ε_t) سازمان یافته است. بنابراین، بازدهٔ موردانتظار همواره عددی ثابت خواهد بود.

$$E(r) = \mu \qquad (۴-۹)$$

اگر نمونهٔ ما شامل اطلاعات k دورهٔ قبل باشد، خواهیم داشت:

$$\mu = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} r_t \qquad (۴-۱۰)$$

مدل گشت تصادفی برای دوره‌های پیش‌بینی کوتاه‌مدت کاربرد دارد. زمانی که این مدل برای دوره‌های پیش‌بینی بسیار کوتاه‌مدت مثلاً، دوره‌های یک‌روزه مورد استفاده قرار می‌گیرد، میانگین بازده به‌شدت کوچک می‌شود. در این‌صورت می‌توانیم از میانگین بازده صرف‌نظر کنیم و بازدهٔ موردانتظار هر دوره را برابر صفر در نظر بگیریم.

مدل شاخصی شارپ[1]

ویلیام شارپ در سال ۱۹۶۳ طی مقاله‌ای تحت عنوان «مدل ساده‌شدهٔ تحلیل سبد دارایی» به ارایهٔ راه‌حلی ساده برای کاهش داده‌ها و محاسبات مورد نیاز مدل مارکویتز پرداخت.[2] مدل عاملی شارپ به‌صورت مدل‌های تک‌عاملی[3] و چندعاملی[4] مطرح است. در مدل تک‌عاملی چنین فرض می‌شود که بازدهٔ کلیهٔ اوراق بهادار تنها به یک دلیل با یکدیگر همبستگی دارند. این دلیل همان عامل مشترک است که کلیهٔ اوراق بهادار، با شدت‌های

1. Sharpe index model
2. Sharpe (1963).
3. single-factor model
4. multi-factor model

مختلف نسبت به آن واکنش نشان می‌دهند. این عامل مشترک معمولاً سبد بـازار در نظـر گرفته می‌شود. مدل تک‌عاملی شارپ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i I_t + \varepsilon_{it} \quad (۱۱-۴)$$

r_{it}: بازدهٔ دارایی i در پایان دورهٔ t

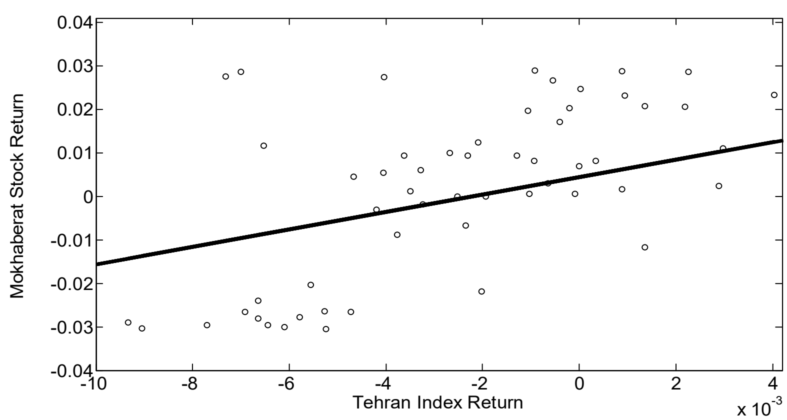
α_i: بازدهٔ ورقهٔ بهادار i زمانی که کلیهٔ عوامل صفر باشد.

β_i: ضریب حساسیت ورقهٔ بهادار i نسبت به عامل مشترک

I_t: عامل مشترک بازده در پایان دورهٔ t

ε_{it}: عامل اختصاصی بازدهٔ دارایی i در پایان دورهٔ t

مدل عاملی شارپ به‌صورت ضمنی دو دسته رویداد را در تلاطم‌های بازده سهام مـؤثر می‌داند. دستهٔ اول رویدادهای کـلان اسـت کـه تقریبـاً کلیـهٔ اوراق بهـادار را بـا شـدت و ضعف‌های مختلف تحت تأثیر قرار می‌دهد. این دسته از رویـدادها همـان عامـل مشـترک است که میزان واکنش هر یک از اوراق بهادار به آن توسط ضریب بتا تعیین می‌شود. دسته دوم، رویدادهای خردی است که تنها بر روی سهام شرکت‌های منفرد مـؤثر اسـت و تـأثیر کلی بر روی سهام ندارد. اعتصاب کارکنان یک شرکت، آتش‌سـوزی در یکـی از واحـدها و فوت یکی از افراد کلیدی سازمان مثال‌هایی از این رویدادهای خرد است. نمودار زیـر، خـط مشخصات سهم مخابرات ایران برای دوره‌ای معین است. شیب این خط همان ضریب بتا و عرض از مبدأ آن معادل آلفاست. $\left(\beta = 2.004, \alpha = 0.004\right)$



نمودار (۴-۲): خط مشخصات سهم مخابرات ایران

این مدل نحوهٔ شکل‌گیری بازدهٔ اوراق بهادار را بر اساس متغیرهـای بـرون‌زا تشـریح می‌کند. این متغیرها همان عوامل ریسک است و بنابراین از ایـن مـدل می‌تـوان بـه‌عنوان نگاشت بازدهٔ دارایی در مدل‌سازی VaR استفاده کرد. بازدهٔ موردانتظار مدل برابر است با:

$$E(r_t) = \alpha + \beta E(I_t) \quad (۱۲-۴)$$

که $E(I_t)$ مقدار موردانتظار عامل مشترک در دورهٔ t است.

بدیهی است که برای دستیابی به پیش‌بینی‌هـای بـازده بایـد پارامترهـای α و β را برآورد کنیم. برآورد این پارامترهـا بـر اسـاس روش حـداقل مجـذورات صـورت می‌گیـرد. بنابراین، راه‌حل بسته‌ای برای برآورد این پارامترها وجود دارد:

$$\hat{\beta} = \frac{\text{cov}(r_t, I_t)}{\sigma_I^2} \qquad \hat{\alpha} = \bar{r} - \beta\bar{I} \quad (۱۳-۴)$$

که $\text{cov}(r_t, I_t)$، کوواریانس بازدهٔ سهم با بازدهٔ شاخص، σ_I^2 واریانس بازدهٔ شـاخص، $\bar{r}$ و $\bar{I}$ به‌ترتیب میانگین بازدهٔ سهم و میانگین بازدهٔ شاخص است.

مدل‌های میانگین متحرک[1]

مدل‌های میانگین متحرک برای داده‌های سری زمانی مورد استفاده قرار می‌گیـرد. در این مدل‌ها فرآیند شکل‌گیری بازدهٔ قیمت‌ها به‌صورت زیر تشریح می‌شود:

$$MA(q) \quad r_t = \omega + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (۱۴-۴)$$

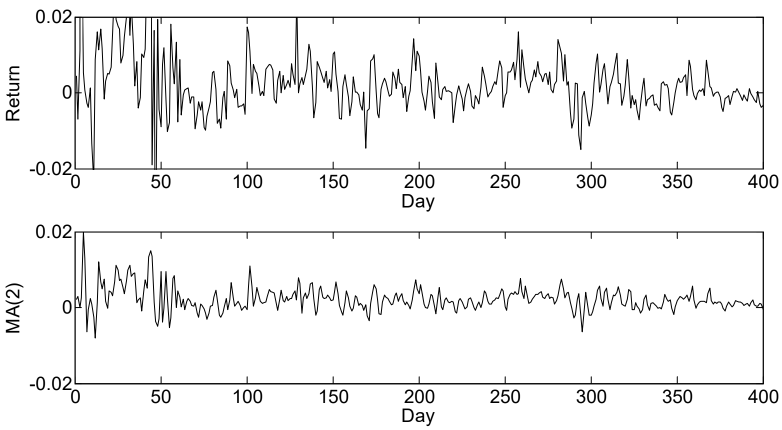
در این مدل، بازدهٔ دارایی در هر دوره (r_t)، معادل حاصل‌جمع یک مقدار ثابت (ω) و ضرایب β_j در جملات خطای دوره‌هایی با وقفه‌های متناظر (ε_{t-j}) و جملهٔ خطـای همـان دوره (ε_t) است. ضرایب β_j نشان‌گر خودهمبستگی‌ها در یـک فرآینـد میـانگین متحـرک می‌باشد. اگر مدل شامل همبستگی با جملات خطای یک دورهٔ قبـل (وقفـهٔ یـک دوره‌ای)

---
1. moving average models

باشد، به آن میانگین متحرک مرتبهٔ اول[1] می‌گویند و آن را با $MA(1)$ نشان می‌دهنـد. اگـر این همبستگی با جملات خطای q دورهٔ قبل برقرار گردد به آن میـانگین متحـرک مرتبـهٔ «q»ام[2] گویند و با $MA(q)$ نشان می‌دهند. برای مدل‌سازی مـالی، مـدل‌های $MA(1)$ و $MA(2)$ رایج است. به‌عنوان مثال رابطهٔ زیر یک مدل $MA(2)$ است که بـرای شـاخص سود نقدی و قیمت بورس اوراق بهادار تهران و طی دوره‌ای معین برآورد شده است:

$$r_t = 0.0022 + 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.31\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t \quad (۱۵-۴)$$

در نمودار (۴-۳)، بازدهٔ تحقق‌یافته و بازدهٔ پیش‌بینی‌شدهٔ حاصل از رابطـهٔ فـوق بـرای یک دورهٔ زمانی معین ارایه شده است. بدیهی است کـه اخـتلاف بـین بـازدهٔ تحقـق‌یافتـه (نمودار بالایی) و بازدهٔ پیش‌بینی‌شده (نمودار پایینی) همان جملهٔ خطاست.



نمودار (۴-۳): بازدهٔ تحقق‌یافته (نموداربالایی) و بازدهٔ حاصل از فرآیند MA(2) (نمودار پایینی) برای داده‌های بورس تهران

این دو نمودار شباهت قابل‌ملاحظه‌ای با یکدیگر دارند و این از بـرازش نسـبتاً بـالای مدل و معنی‌داربودن پارامترهای برآوردشده حکایت می‌کند. این وضعیت گویای اینست که داده‌های مورد بررسی را نمی‌توان به‌طرز مناسبی با یک فرآیند گشت تصادفی تشریح کرد.

1. first-order moving average
2. qth-order moving average

با وجود اینکه متغیرهای این مدل درون‌زاست، می‌توان آن را به‌عنوان نگاشت بازدهٔ دارایی یا سبد دارایی مجسم کرد. برای دستیابی به مقدار موردانتظار این مدل باید از جملهٔ خطای دورهٔ پیش‌بینی صرف‌نظر کنیم، چراکه مقدار موردانتظار این جمله صفر است:

$$E(r_t) = \omega + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j} \quad (۱۶-۴)$$

برآورد پارامترها

مدل میانگین متحرک دارای $q+1$ پارامتر (ω و β_jها) است که بر اساس روش حداکثر درست‌نمایی[1] برآورد می‌شود. در بخش بعد، نمونه‌ای از نحوهٔ استفادهٔ این روش برای تخمین پارامترها تشریح می‌شود.

مدل‌های خودرگرسیونی[2]

مدل‌های خودرگرسیونی نیز برای داده‌های سری زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مدل‌ها فرآیند شکل‌گیری بازدهٔ قیمت‌ها به‌صورت زیر مدل‌سازی می‌شود:

$$AR(p) \quad r_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-i} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \; (۱۷-۴)$$

که ω و α_i پارامترهای مدل است.

منظور از عبارت «خودرگرسیونی» در این مدل، رگرسیون r_t بر روی مقادیر گذشتهٔ خودش می‌باشد. α_i نشان‌گر ضرایب خودرگرسیونی در این مدل‌هاست. اگر این رگرسیون بر روی بازده‌های یک دورهٔ قبل باشد به آن خودرگرسیونی مرتبهٔ اول[3] می‌گویند و آن را با $AR(1)$ و اگر بر روی بازده‌های p دورهٔ قبل باشد، به آن خودرگرسیونی مرتبهٔ «p»ام[4] گویند و آن را با $AR(p)$ نشان می‌دهند. برای مدل‌سازی مالی، مدل‌های $AR(1)$ و $AR(2)$ رایج‌تر است.

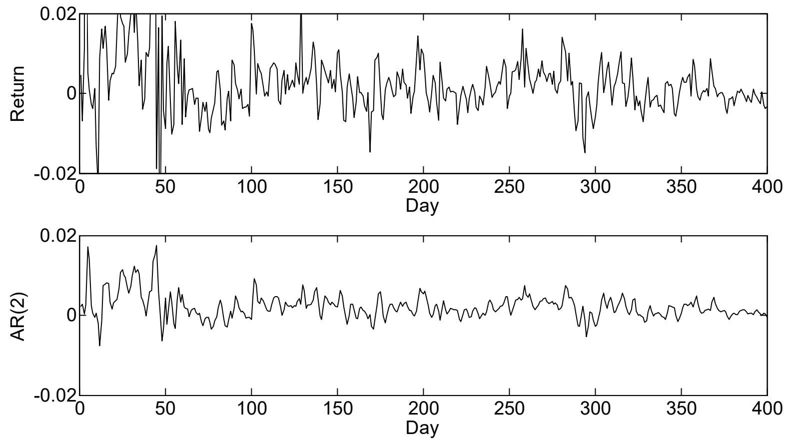
---

1. maximum likelihood
2. autoregressive models
3. first-order autoregressive
4. pth-order autoregressive

رابطهٔ زیر نمایان‌گر یک مدل $AR(2)$ است که برای داده‌های حاصل از شاخص سود نقدی و قیمت بورس اوراق بهادار تهران برآورد شده است.

$$r_t = 0.0011 + 0.26 r_{t-1} + 0.22 r_{t-2} + \varepsilon_t \quad (۱۸-۴)$$

در نمودارهای زیر، بازدهٔ تحقق‌یافتهٔ شاخص بازدهٔ نقدی و قیمت بورس اوراق بهادار تهران و بازدهٔ پیش‌بینی‌شدهٔ حاصل از رابطهٔ فوق برای یک دورهٔ زمانی معین ارایه شده است. بدیهی است که اختلاف این دو بازده در هر دوره، همان جملهٔ خطا (ε_t) است.



نمودار (۴-۴): بازدهٔ تحقق‌یافته (نمودار بالا) و بازدهٔ حاصل از فرآیند AR(2) (نمودار پایین) برای داده‌های بورس تهران

از این مدل نیز می‌توان به‌عنوان نگاشت بازدهٔ دارایی یا سبد دارایی استفاده کرد. ارزش موردانتظار این مدل برابر است با:

$$E(r_t) = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-i} \quad (۱۹-۴)$$

برآورد پارامترها

فرآیندهای آماری حاصل از سری زمانی بر اساس فنون مناسب برآورد آماری تخمین زده می‌شود. برای تخمین پارامترهای مدل‌های خودرگرسیونی از برآوردکننده‌های حداکثر

درست‌نمایی[1] استفاده می‌شود. در این‌جا به تشریح نحوهٔ تخمین پارامترهای مـدل $AR(1)$ می‌پردازیم. رابطهٔ این مدل به‌صورت زیر است:

$$r_t = \omega + \alpha_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \quad (۴-۲۰)$$

اولین گام برای برآورد پارامترها، اسناد یک توزیع احتمال به بازده‌هاسـت. ایـن توزیـع می‌تواند توزیع نرمال، توزیع t و یا هر توزیـع شناخته‌شـدهٔ آمـاری باشـد. انتخـاب از میـان توزیع‌های آماری به ویژگی‌های داده‌ها بستگی دارد. به هر حال در این‌جا به‌منظور راحتـی، فرض را بر این می‌گیریم که بازده‌ها دارای توزیع نرمـال بـا میـانگین μ و واریـانس σ^2 است:

$$r \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad (۴-۲۱)$$

بدیهی است که این توزیع یک توزیع شرطی اسـت. یعنـی بازده‌هـای هـر دوره تنهـا مشروط بر میانگین تخمینی همان دوره نرمال است. توجه داشته باشید که واریـانس بـرای تمامی دوره‌ها عددی ثابت برآورد می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$r_t \sim N(\mu_t, \sigma^2) \qquad (۴-۲۲)$$

از این‌جا به‌راحتی نتیجه می‌گیریم که جملات اخلال در هر دوره دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 است:

$$\varepsilon_t = r_t - \mu_t \Rightarrow \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (۴-۲۳)$$

بنابراین، هر جملهٔ اخلال بر اساس یک فرآیند تصادفی به‌شرح زیر ایجاد می‌شود:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma \qquad (۴-۲۴)$$

که z_t متغیری دارای توزیع نرمال‌استاندارد است. بنـابراین، باقیمانـدهٔ استانداردشـده[2] دارای توزیع نرمال‌استاندارد است:

---

1. maximum likelihood estimators (MLEs)
2. standardized residual

$$z_t \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\varepsilon_t}{\sigma} \sim N(0,1) \quad (۲۵-۴)$$

برای تخمین پارامترهای مدل $AR(1)$ نسبت فوق یا همان باقیمانده‌های استانداردشده را برای هر دوره استخراج می‌کنیم. برای این کار در هر دوره باقیمانده را استخراج می‌کنیم و همان‌طور که می‌دانیم این باقیمانده اختلاف بین بازدهٔ هر دوره و بازدهٔ موردانتظار همان دوره است. بازدهٔ موردانتظار هر دوره بر اساس رابطهٔ شکل‌گیری بازدهٔ قیمت‌ها حاصل می‌شود. مخرج این کسر، شامل انحراف‌معیار تخمینی است. توجه داشته باشید که این انحراف‌معیار برای تمامی دوره‌ها مقدار ثابتی فرض می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma} = \frac{r_t - (\omega + \alpha_1 r_{t-1})}{\sigma} \quad (۲۶-۴)$$

این نسبت دارای توزیع نرمال‌استاندارد است. برای تخمین پارامترها از روش حداکثر درست‌نمایی استفاده می‌کنیم. مبنای این روش این است که پارامترهای ω، α و σ چه مقداری داشته باشد تا چگالی احتمال مشترک[1] z_t حداکثر شود. اگر تعداد T مشاهده داشته باشیم، با فرض این‌که سری متغیر z_t دارای توزیع یکسان و مستقل از هم[2] باشد، چگالی احتمال مشترک آن‌ها برابر با حاصل‌ضرب چگالی‌هاست. بنابراین، می‌توان پارامترها را با بیشینه‌کردن تابع احتمال[3] به‌دست آورد:

$$\max L = \max \prod_{t=1}^{T} \varphi_t\left(z_t \middle| \mu_t, \sigma\right) = \max \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z_t^2}{2} \right) \right) \quad (۲۷-۴)$$

که L تابع احتمال، φ_t تابع چگالی احتمال نرمال‌استاندارد در دورهٔ t و $\prod$ شمارش‌گر ضرب است. در اغلب موارد بیشینه‌کردن تابع لگاریتمی ساده‌تر است به همین دلیل تابع لگاریتم احتمال[4] را حداکثر می‌کنیم:

---

1. joint probability density
2. identically and independent distributed (IID)
3. likelihood function
4. log-likelihood function

$$\max \ln L = \max \ln \prod_{t=1}^{T} \varphi_t\left(z_t \middle| \mu_t, \sigma_t\right) = \max \ln \prod_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z_t^2}{2}\right)\right)$$
$$= \max \sum_{t=1}^{T}\left(\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{z_t^2}{2}\right)$$

(۲۸-۴)

تابع لگاریتم احتمال، یک تابع افزایشی است بنابراین، هر پارامتری که L را حداکثر سازد، باعث حداکثرشدن $ln\ L$ نیز می‌شود.

مثال (۴-۱): برآورد پارامترهای مدل $AR(1)$

سری زمانی جدول (۴-۱) را در نظر بگیرید. این سری زمانی شامل بازده‌های روزانهٔ ماه گذشتهٔ یک سبد دارایی فرضی است. (بازده‌ها به درصد است)

r_t	t	r_t	t	r_t	t	r_t	t
۱/۸	-۷	-۱/۲	-۱۵	۰/۸۹	-۲۳	۰/۹۹	-۳۱
۵/۱۳	-۶	۱/۳۸	-۱۴	۱/۲۶	-۲۲	۵/۷۲	-۳۰
۰/۳۳	-۵	۳/۱۹	-۱۳	-۰/۹۳	-۲۱	۲/۷۷	-۲۹
۰/۴۲	-۴	-۱/۴۴	-۱۲	-۰/۵	-۲۰	۰/۸۳	-۲۸
۰/۷	-۳	۰/۵۵	-۱۱	-۱/۲	-۱۹	۲/۴۲	-۲۷
۰/۴۷	-۲	۴/۴۸	-۱۰	۳/۱	-۱۸	۰/۴۴	-۲۶
-۵/۱۲	-۱	۳/۴۹	-۹	۰/۸۴	-۱۷	۵/۲۱	-۲۵
-۲/۲۶	۰	۴	-۸	-۱/۶۲	-۱۶	۳/۰۹	-۲۴

جدول (۴-۱): سری زمانی بازده‌های روزانهٔ ماه گذشته برای یک سبد فرضی

پارامترهای تخمینی حاصل از مدل $AR(1)$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\theta = (\omega, \alpha_1, \sigma) = (0.82, 0.31, 1.50)$$

مجموعهٔ پارامترهای مدل را با θ نشان داده‌ایم. دقت داشته باشید که σ نیز در فرآیند تخمین پارامترها برآورد می‌گردد که البته مقدار آن برای ارائهٔ پیش‌بینی‌ها از اهمیت

برخوردار نیست. بنابراین، پارامترهای اصلی مدل همان ω و α_1 است که به‌ترتیب ۰/۸۲ و ۰/۳۱ برآورد شده است.

مدل‌های خودرگرسیونی میانگین متحرک

این مدل‌ها نیز برای داده‌های سری زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. همان‌طور که از نام آن‌ها پیداست، مدل دارای دو قسمت است. یک قسمت مربوط به خودرگرسیونی متغیر مورد بررسی در هر دوره با دوره‌های قبل می‌باشد. این خودرگرسیونی می‌تواند با مقادیر متغیر در یک دورهٔ قبل برقرار گردد که در این صورت به آن خودرگرسیونی مرتبهٔ اول می‌گویند و آن را با $AR(1)$ نشان می‌دهند. اگر بین متغیر مورد بررسی در هر دوره با مقادیر آن در دو دورهٔ زمانی گذشته رابطهٔ خودرگرسیونی برقرار کنیم، به آن خودرگرسیونی مرتبهٔ دوم[1] می‌گویند و اگر با p دورهٔ زمانی گذشته ارتباط برقرار کنیم به آن خودرگرسیونی مرتبهٔ «p»ام می‌گویند. قسمت دیگر مدل به برقراری ارتباط میان متغیر در هر دوره با جملات خطای دوره‌های قبل می‌پردازد. اگر این ارتباط با جملات خطای یک دورهٔ قبل برقرار گردد، به آن میانگین متحرک مرتبهٔ اول گویند و آن را با $MA(1)$ نشان می‌دهند و اگر با q دورهٔ زمانی گذشته ارتباط برقرار گردد، به آن میانگین متحرک مرتبهٔ «q»ام گویند و با $MA(q)$ نشان می‌دهند. مدل‌های $ARMA$ از ادغام مدل‌های خودرگرسیونی و میانگین متحرک حاصل می‌شود. بر اساس این مدل می‌توان بازدهٔ هر دوره را بر اساس بازده‌ها و جملات خطای دوره‌های قبل مدل‌سازی کرد.

$$ARMA(p,q) \qquad r_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, r_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \, \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (۲۹-۴)$$

ω: پارامتری که نشان‌گر مقدار بازدهٔ سهم در صورت صفربودن دیگر پارامترهاست و به مثابه میانگین رابطه می‌باشد.

α_i: پارامتری که نشان‌گر وزن بازده‌های مرتبهٔ «i»ام در تعیین بازدهٔ «t»ام است.

β_j: پارامتری که نشان‌گر وزن جملات خطای مرتبهٔ «j»ام در تعیین بازدهٔ «t»ام است.

1. second-order autoregressive

r_{t-i}: بازده‌های مرتبهٔ «i»ام

ε_{t-j}: جملات خطای مرتبهٔ «j»ام

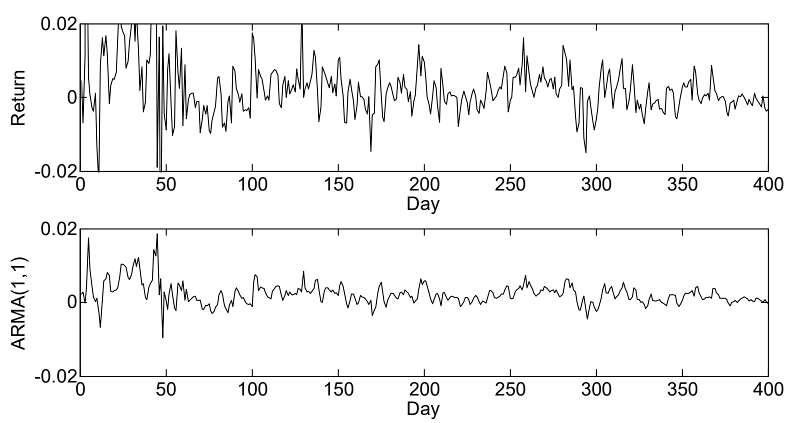
عبارت $ARMA(p,q)$ به‌معنی مدل خودرگرسیونی میانگین متحرک با خودرگرسیونی مرتبهٔ «p»ام و میانگین متحرک مرتبهٔ «q»ام است. استفاده از مدل $ARMA(1,1)$ در سری بازدهٔ مالی بسیار رایج است. برای این مدل بر اساس رابطهٔ فوق خواهیم داشت:

$$ARMA(1,1) \qquad r_t = \omega + \alpha\, r_{t-1} + \beta\, \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (۳۰\text{-}۴)$$

استفاده از این مدل‌ها خصوصاً زمانی که افق زمانی پیش‌بینی کوتاه باشد، بسیار رایج است. به‌عنوان مثال، مدل زیر بر اساس سری شاخص سود نقدی و قیمت بورس اوراق بهادار تهران برای دوره‌ای معین برازش شده است:

$$r_t = 0.0006 + 68 r_{t-1} - 0.38\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (۳۱\text{-}۴)$$

در نمودارهای زیر، بازدهٔ تحقق‌یافته شاخص بازدهٔ نقدی و قیمت بورس اوراق بهادار تهران و بازدهٔ پیش‌بینی‌شدهٔ حاصل از رابطهٔ فوق برای یک دورهٔ زمانی معین ارایه شده است.



نمودار (۴-۵): بازدهٔ تحقق‌یافته (نمودار بالا) و بازدهٔ حاصل از فرآیند ARMA(1,1) (نمودار پایین) برای داده‌های بورس تهران

برآورد پارامترها

برای پیش‌بینی بازده باید پارامترهای مدل$ARMA$ یعنی ω، αو β را برآورد کنیم. در این‌جا باز هم تأکید می‌کنیم که تخمین پارامترها با اسناد یک توزیع احتمال به سری بازده آغاز می‌شود. این توزیع احتمال عموماً نرمال است، اما می‌توان از دیگر توزیع‌های شناخته‌شدهٔ آماری مانند توزیع t و توزیع خطای تعمیم‌یافته[1] نیز استفاده نمود.

برآورد این پارامترها مستلزم استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی است. روش کار دقیقاً شبیه همان فرآیندی است که برای مدل‌های AR تشریح نمودیم با این تفاوت که در این‌جا پارامترهای β_j به مجموعه پارامترها اضافه می‌شود. بنابراین، برای ساده‌ترین حالت مدل‌های $ARMA$ یعنی $ARMA(1,1)$، بازده‌های استانداردشده (معادل باقیمانده‌های استانداردشده) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma} = \frac{r_t - (\omega + \alpha_1 r_{t-1} - \beta_1 \varepsilon_{t-1})}{\sigma} \quad (۳۲-۴)$$

و در ادامه همان‌گونه که قبلاً تشریح کردیم، باید لگاریتم تابع احتمال این بازده‌های استانداردشده را جهت تخمین پارامترها حداکثر کنیم.

مدل عمومی شکل‌گیری بازدهٔ قیمت‌ها

آنچه در مورد مدل‌های شکل‌گیری بازدهٔ قیمت‌ها گفتیم تنها پنج مدل از انواع مدل‌های رایجی است که برای این منظور به‌کار گرفته می‌شود. همه این مدل‌ها قصد شناسایی فرآیندی را دارند که بر اساس آن می‌توان نحوهٔ حرکت بازدهٔ دارایی را توصیف کرد. به‌طور کلی تمامی مدل‌هایی که نحوهٔ شکل‌گیری بازدهٔ قیمت‌ها را تشریح می‌کنند، از دو جزء تشکیل می‌شود:

۱. جزء قطعی[2]
۲. جزء تصادفی[3]

---
1. generalized error distribution (GDE)
2. deterministic component
3. random component

بدین ترتیب بازدهٔ دارایی‌ها تابعی از هر دو جزء است:

$$r_t = f\left(d_t, \varepsilon_t\right) \qquad (۴-۳۳)$$

که r_t بازدهٔ دارایی در دورهٔ t است؛ d_t جزء قطعی بازده در دورهٔ t و ε_t جزء تصادفی بازده در دورهٔ t می‌باشد. جزء تصادفی پس از تعیین جزء قطعی مشخص می‌شود. بر این اساس، بازده تابعی از جزء تصادفی، مشروط بر مقدار معینی از d_t است. این تابع عموماً تابعی ساده و خطی است:

$$r_t = d_t + \varepsilon_t \qquad (۴-۳۴)$$

جزء قطعی بازده به ساختار مدل بستگی دارد. به‌عنوان مثال این جزء می‌تواند منعکس‌کنندهٔ اثرات فصلی[1] یا اثرات تعطیلات[2] باشد و یا ممکن است به‌صورت قضاوتی و یا بر اساس تحلیل رگرسیون تعیین گردد. مثلاً، در مدل گشت تصادفی، میانگین بازده (μ_t) جزء قطعی و جملات خطا به‌عنوان جزء تصادفی تلقی می‌شود. در مدل خودرگرسیونی میانگین متحرک، عبارت زیر جزء قطعی است:

$$\omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, r_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \, \varepsilon_{t-j} \qquad (۴-۳۵)$$

که در واقع همان بازدهٔ موردانتظار ($E(r_t)$) است. تفاوت این جزء با بازدهٔ واقعی که همان جملات خطاست، جزء تصادفی بازده را می‌سازد. بنابراین، منظور از جزء قطعی همان بازدهٔ موردانتظار است و هرگونه انحرافی از انتظارات به‌عنوان خطای پیش‌بینی درنظر گرفته می‌شود.

علت این‌که عبارت قطعی را برای جزء اول بازده به‌کار می‌بریم این است که مقدار آن با توجه به داده‌هایمان، پارامترها و ساختار مدل به‌صورت قطعی تعیین می‌شود و این در حالی است که جزء تصادفی به مقدار بازدهٔ واقعی و جزء قطعی بستگی دارد.

---

1. seasonal effects
2. holiday effects

مدل‌های پیش‌بینی تلاطم، کوواریانس و ماتریس واریانس-کوواریانس

حال که با مدل‌های پیش‌بینی بازده آشنا شدیم به بخش دوم مدل‌سازی ریسک یعنی مدل‌های پیش‌بینی تلاطم می‌پردازیم. بدیهی است که وقتی از دارایی انفرادی سخن به میان می‌آید، مدل‌های پیش‌بینی تلاطم مطرح می‌شود و زمانی که سبد دارایی‌ها بررسی می‌شود، مدل‌های پیش‌بینی کوواریانس یا همبستگی و مدل‌های پیش‌بینی ماتریس واریانس-کوواریانس نیز پا به میان می‌گذارد. در ادامه، به‌ترتیب هرکدام از این مدل‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مدل‌های پیش‌بینی تلاطم

در بخش قبلی، مدل‌های پیش‌بینی بازدهٔ قیمت را مورد بررسی قرار دادیم. هدف این مدل‌ها، تعیین بازدهٔ موردانتظار دوره‌های آتی است. این بازدهٔ موردانتظار همراه با تلاطم‌هایی است. در این‌جا به معرفی مدل‌های پیش‌بینی تلاطم می‌پردازیم. به‌طور کلی این مدل‌ها را می‌توان در سه طبقه تقسیم‌بندی کرد:

- مدل میانگین متحرک ساده[1]
- مدل میانگین متحرک با اوزان نمایی[2]
- مدل‌های تلاطم تصادفی[3]

تمامی این مدل‌ها، شرطی است. یعنی تلاطم هر دوره مشروط بر اطلاعات موجود تا دورهٔ قبل، پیش‌بینی می‌شود. به همین دلیل به آن‌ها مدل‌های واریانس شرطی[4] نیز می‌گویند.

مدل میانگین متحرک ساده

1. simple moving average model (SMAM)
2. exponentially weighted moving average model (EWMAM)
3. stochastic volatility models
4. conditional variance models

میانگین متحرک ساده، آسان‌ترین و رایج‌ترین راه تخمین تلاطم است. بـه ایـن روش انحراف‌معیار تاریخی نیز اطلاق می‌شـود. در ایـن مـدل بـا در نظرگـرفتن تاریخچـه‌ای از نرخ‌های بازدهٔ یک دارایی، نمونه‌ای خاص از تعداد k آخرین بازده را انتخاب می‌کنیم. بدین ترتیب، واریانس تخمینی بر اسـاس نمونـه‌ای از k دورهٔ معـاملاتی گذشـته به‌صـورت زیـر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{(k-1)} \sum_{S=t-k}^{t-1} (r_s - E(r_t))^2 \quad (۴-۳۶)$$

σ_t^2: تلاطم تخمینی دورهٔ t

r_s: «s»امین بازدهٔ دارایی

$E(r_t)$: بازدهٔ موردانتظار دارایی برای دورهٔ t

توجه داشته باشید که در میانگین متحرک ساده برای تخمین $E(r_t)$ معمـولاً از مـدل گشت تصادفی غیرشرطی استفاده می‌کنند و بنابراین، برای تمامی دوره‌ها، $E(r_t)$ را معادل μ یعنی میانگین سری بازده در نظر می‌گیرنـد. علـت ایـن امـر بـدیهی بـه‌نظر می‌رسـد. همان‌طور که می‌دانیم عموماً تلاطم‌های سری مالی بیشتر قابلیت مدل‌سازی دارند، چراکـه مطالعات، همبستگی تلاطم‌های بازدهٔ مالی و به‌اصطلاح تشکیل خوشهٔ تلاطم[1] را به اثبات رسانده است و این در حالی است که وجود همبستگی‌های بازده خصوصاً در بازارهایی که از کارایی نسبی برخوردارند، کمتر به‌چشم می‌خورد. بنابراین، زمانی که ما با به‌کارگیری مـدل ساده‌ای مانند میانگین متحرک ساده از پویایی‌های تلاطم‌ها و وابستگی‌های زمـانی آن‌هـا به‌طرز قابل‌ملاحظه‌ای چشم‌پوشی می‌کنیم، دلیلی ندارد که بازدهٔ موردانتظـار را بـر اسـاس مدل‌هایی که وابستگی زمانی بازده را در نظر می‌گیرند، (مانند مـدل $ARMA$) مدل‌سـازی نماییم. بااین‌حال می‌توانیم بـه‌جای $E(r_t)$ از مقـادیر موردانتظـار یکـی دیگـر از مـدل‌های تشریح‌کنندهٔ بازدهٔ قیمت‌ها استفاده کنیم.

---

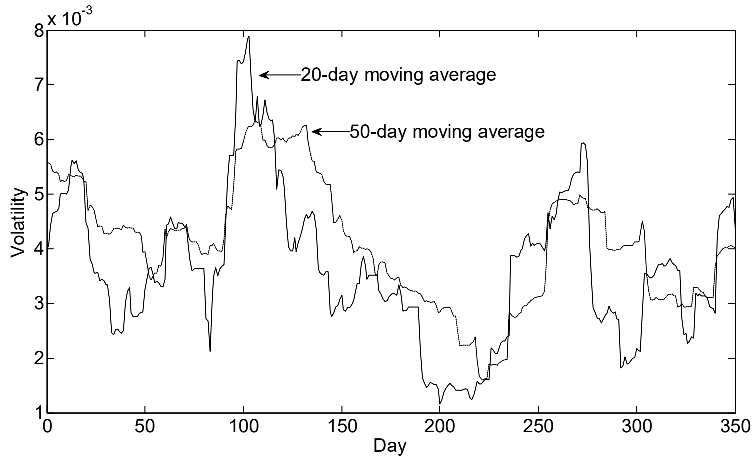
1. volatility cluster

نکته قابل‌تأمل در میانگین متحرک ساده این است که به تمامی مشاهدات موجود در پنجرهٔ غلتان[1] (k مشاهده) وزنی یکسان و به هر مشاهده‌ای که خارج از پنجرهٔ نمونه‌گیری باشد، وزن صفر اختصاص می‌دهد. بدین ترتیب مشاهدات خارج از نمونه در برآورد تلاطم بی‌تأثیر می‌شود.

یکی از مسائلی که در رابطه با این مدل وجود دارد، انتخاب اندازهٔ پنجرهٔ نمونه‌گیری یا همان انتخاب k است. هرچه k کوچک‌تر باشد، برآوردها از ثبات کمتری برخوردار است و هرچه k بزرگ‌تر باشد، ثبات برآوردها بیشتر می‌شود. از سوی دیگر انتخاب یک نمونهٔ بزرگ به‌معنی استفاده از مشاهدات دورتر و احتمالاً نامربوط‌تر برای برآورد تلاطم است. بدین ترتیب باید بین ثبات برآوردها و مربوط‌بودن داده‌ها، موازنه‌ای برقرار کنیم.

هم‌چنین این مدل برای مشاهداتی در نمونه که دورترند و مشاهدات اخیر وزن یکسانی در نظر می‌گیرد. اگر یک حادثهٔ غیرعادی در تاریخ t رخ دهد، برنامهٔ وزن‌دهی مدل گویای این است که اثرات آن در برآوردهای تلاطم تا k دورهٔ بعدی ادامه خواهد داشت و این در حالی است که آن حادثه سپری شده و بازار به حالت عادی بازگشته است. این نتیجه به اثرات شبح[2] منجر می‌شود. بدین معنی که برآوردهایمان از تلاطم به‌طور مصنوعی تا k دوره پس از رخداد حادثهٔ غیرعادی، بالا خواهد بود و ناگهان پس از خروج این حادثه (مشاهده) از پنجرهٔ نمونه‌گیری، برآوردها به سطح عادی بازمی‌گردد. این اثرات در نمودار زیر برای داده‌های شاخص بورس اوراق بهادار تهران ارایه شده است. در این‌جا اندازهٔ k، ۲۰ و ۵۰ انتخاب شده است.

1. rolling window
2. ghost effects



نمودار (۴-۶): تلاطم‌های تخمینی شاخص بورس تهران با استفاده از میانگین متحرک ساده

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در حوالی $t=100$ شوکی به بازار وارد شده است. بدیهی است که برای «k»های بزرگ‌تر، برآوردهای تلاطم در طی زمان مسطح‌تر بوده و مدل واکنش کمتری نسبت به مشاهدات انفرادی از خود بروز می‌دهد. وقتی شوک ایجاد می‌گردد، هر دو تخمین تلاطم ناگهان بالا می‌رود. تخمین‌ها در ادامه برای مدتی بالا می‌مانند و در نهایت با خروج شوک از پنجرهٔ نمونه‌گیری افت می‌کند. نقاط اوج منعکس‌کنندهٔ اثرات شبح بوده و به k بستگی دارد. هرچه k کوچک‌تر باشد، تخمین‌ها زودتر اوج می‌گیرد و اثرات شوک نیز زودتر ناپدید می‌گردد. بنابراین، بین شدت و طول مدت اثرات شبح، موازنه‌ای برقرار است.

مدل میانگین متحرک با اوزان نمایی

یک راه به‌دست‌آوردن ویژگی‌های پویای تلاطم، استفاده از میانگین متحرک با اوزان نمایی است که در این‌صورت آخرین مشاهدات وزن بزرگ‌تری را در تخمین تلاطم بر عهده دارد. به این روش هموارسازی نمایی–ریسک متریک[1] نیز می‌گویند. این روش نسبت به مدل اوزان مساوی دارای دو مزیت مهم است. اولاً تلاطم به شوک‌های بازار واکنش سریع‌تری نشان می‌دهد، چراکه داده‌های اخیر وزن بزرگ‌تری را نسبت به داده‌های قدیمی به‌دوش می‌کشند. ثانیاً بعد از یک شوک (مثلاً، یک بازدهٔ بزرگ)، تلاطم به‌صورت نمایی

1. exponential smoothing-RiskMetric

رابطه ۲۸

به‌همراه کاهش وزن شوک مشاهده‌شده کاهش می‌یابد و متعاقباً خروج شوک از نمونه اثـر چندانی بر واریانس و انحراف‌معیار نخواهد داشـت. بـرعکس، در میـانگین متحـرک سـاده، به‌هنگام خروج شوک از نمونه، تغییرات نسبتاً ناگهانی در انحراف‌معیار ایجاد می‌شود کـه در بیشتر موارد چندین ماه بعد از رخداد شوک است. میانگین متحرک با اوزان نمایی با معادلـهٔ زیر نشان داده می‌شود:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda)\sum_{S=t-k}^{t-1}\lambda^{t-s-1}(r_s - E(r_t))^2 \quad (۳۷-۴)$$

که:

σ_t^2: تلاطم تخمینی دورهٔ t

λ: ضریب هموارسازی[1]

r_s: «s»امین بازدهٔ دارایی

$E(r_t)$: بازدهٔ موردانتظار دارایی برای دورهٔ t

در این‌جا نیز همانند مدل SMA، اغلب از مدل گشت تصادفی غیرشرطی برای برآورد بازده‌های موردانتظار استفاده می‌شود. بدین معنی که تمامی بازده‌های موردانتظار برابر عدد ثابتی (μ) در نظر گرفته می‌شود. با این وجود می‌توان از دیگر مدل‌های پیش‌بینـی بـازده نیز جهت برآورد $E(r_t)$ استفاده نمود.

بدیهی است که این تلاطم تخمینی مشروط بر اطلاعات موجود تا زمان $t-1$ می‌باشـد و بنابراین می‌توان آن را با $\sigma_{t|t-1}$ نیز نشان داد. یکی از خصوصیات جالب تخمین‌زننـده بـا اوزان نمایی این است که می‌توان آن را به شکل بازگشتی[2] نوشت. چنانچـه مطـابق آنچـه گفته شد، بازدهٔ موردانتظار مساوی صفر فرض شود، می‌توان تلاطم دورهٔ t را به‌صورت زیـر برآورد کرد:

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \lambda\sigma_{t-1|t-2}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2 \quad (۳۸-۴)$$

---

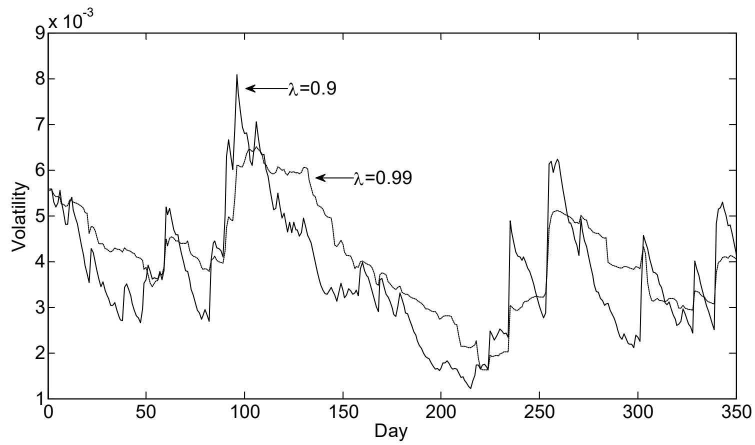
1. smoothing coefficient
2. recursive

$\sigma^2_{t|t-1}$: تلاطم تخمینی دورهٔ t بر اساس اطلاعات موجود تا تاریخ $t\text{-}1$

$\sigma^2_{t-1|t-2}$: تلاطم تخمینی دورهٔ $t\text{-}1$ بر اساس اطلاعات موجود تا تاریخ $t\text{-}2$

در نمودار (۴-۷) برآوردهای حاصل از مدل $EWMA$ برای داده‌های نمودار (۴-۶) و برای ضرایب هموارسازی ۰/۹ و ۰/۹۹ ارایه شده است.

وقتی شوک حوالی $t=100$ رخ می‌دهد، هر دو تلاطم تخمینی اوج می‌گیرد و با گذشت زمان فروکش می‌کند. تخمین‌های حاصل از ضریب هموارسازی کوچک‌تر، بیشتر افزایش می‌یابد، اما زودتر فروکش می‌کند. تخمین‌های حاصل از $\lambda = 0.99$ با شدت کمتری افزایش می‌یابد، اما با نرخ آهسته‌تری افت می‌کند.



نمودار (۴-۷): تلاطم‌های تخمینی شاخص بورس تهران با استفاده از میانگین متحرک نمایی

بنابراین، ضریب هموارسازی اثر قابل‌ملاحظه‌ای بر تلاطم‌های تخمینی می‌گذارد. با مقایسهٔ نمودارهای (۴-۶) و (۴-۷) می‌توان فهمید که اثرات شبح در مدل SMA نسبت به $EWMA$ برجسته‌تر است.

برآورد ضریب هموارسازی

بر اساس روابط (۴-۳۷) و (۴-۳۸)، استفاده از مدل میانگین متحرک نمایی برای محاسبه و پیش‌بینی تلاطم‌ها، مستلزم تعیین ضریب هموارسازی (λ) است. ضریب هموارسازی بین صفر و یک است. هر چه این ضریب کوچک‌تر باشد، وزنی که به

رویدادهای تازه داده می‌شود، بیشتر خواهد بود. اکنون این سؤال مطرح است که ضریب هموارسازی در چه صورتی بهینه خواهد بود و به افزایش دقت پیش‌بینی‌های مدل منجر می‌شود؟ یک شیوه برای انتخاب ضریب هموارسازی بهینه، این است که به ازای یک مقدار مشخص λ، مقدار تلاطم‌های پیش‌بینی‌شده با مقدار واقعی آن مقایسه و خطای پیش‌بینی به حداقل برسد. یک شاخص آماری که برای این منظور استفاده می‌شود، همان جذر میانگین مجذورات خطا[1] است که سیستم ریسک‌متریکس نیز بر پایهٔ آن طراحی شده است. چنانچه بازدهٔ دورهٔ t را با r_t و واریانس پیش‌بینی‌شده برای آن را با σ_t^2 نشان دهیم، خطای پیش‌بینی برای دورهٔ t به‌صورت تفاضل واریانس واقعی و واریانس پیش‌بینی‌شده خواهد بود یعنی:

$$\varepsilon_t = r_t^2 - \sigma_t^2 \qquad (۴-۳۹)$$

بر اساس تعریف، جذر میانگین مجذورات خطا به‌صورت زیر خواهد بود:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_t^2 - \sigma_t^2)^2} \qquad (۴-۴۰)$$

در معادلهٔ فوق، T، تعداد واریانس‌ها (تلاطم‌ها) پیش‌بینی‌شدهٔ بازده است. همچنین توجه داشته باشید که σ_t^2 به‌صورت تابعی از λ است. در عمل برای تعیین ضریب هموارسازی بهینه (λ^*) باید ریشهٔ دوم میانگین مجذورات خطا را حداقل کرد. برای این منظور باید مقادیر مختلف λ را در معادلهٔ فوق قرار داد تا ضریب هموار سازی بهینه به‌دست آید. بر اساس مطالعات انجام‌شده توسط مؤسسهٔ جی. پی. مورگان، مقدار λ برای برآورد تلاطم‌های روزانه، ۰/۹۴ و برای پیش‌بینی‌های ده‌روزه، ۰/۹۷ پیشنهاد می‌شود. مقدار بهینهٔ λ معمولاً بین ۹۰٪ و ۹۹٪ است.

توجه داشته باشید که رابطهٔ (۴-۴۰) بر این فرض استوار است که میانگین بازدهٔ دارایی در هر دوره صفر است. در صورتی که دوره‌ها کوچک باشد، این فرض منطقی به‌نظر می‌رسد. هم‌زمان با بزرگ‌ترشدن دوره‌های پیش‌بینی، انتظار می‌رود که بازدهٔ دارایی از صفر

1. root of mean squares error (RMSE)

فاصله بگیرد. بدیهی است که در این‌صورت باید مجذور انحرافات از میانگین یعنی $(r_t - E(r_t))^2$ را جایگزین r_t^2 در رابطهٔ (۴-۴۰) کرد.

مدل‌های تلاطم تصادفی

در اقتصادسنجی کاربردی[1]، مدل حداقل مجذورات[2] از بیشترین استفاده برخوردار است. این یک انتخاب طبیعی است، چراکه عموماً متخصصان اقتصادسنجی کاربردی به‌دنبال این هستند که یک متغیر چگونه در پاسخ به تغییر دیگر متغیرها تغییر می‌کند. وظیفهٔ متخصصان این حوزه، پیش‌بینی و تجزیه و تحلیل میزان خطاهای مربوط به مدل‌های برآوردشده است. پس از پیش‌بینی متغیرها، سؤالاتی راجع به نوسانات خطاهای مدل مطرح می‌شود و مدل‌های خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس[3] و نیز خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافته[4] به‌عنوان ابزارهایی استاندارد برای پاسخگویی به این سؤالات تبدیل شده‌اند. این مدل‌ها نسبت به سایر مدل‌های تلاطم بهبود قابل‌ملاحظه‌ای یافته‌اند و به‌طور گسترده‌ای در اقتصادسنجی و خصوصاً مدل‌سازی مالی کاربرد دارند. محرک چنین کاربرد گسترده‌ای، وجود ویژگی ناهمسانی واریانس در سری بازدهٔ مالی است.

ناهمسانی واریانس[5]

نسخهٔ اصلی مدل حداقل مجذورات، بر اساس این فرض قرار دارد که ارزش موردانتظار مجذورات تمامی جملات خطا، در هر نقطهٔ خاصی یکسان است. این فرض در ادبیات اقتصادسنجی، همسانی‌واریانس[6] نامیده می‌شود و تمرکز محوری مدل‌های خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس، عدم‌صحت همین فرض است. داده‌هایی که در آن‌ها واریانس‌های جملات خطا یکسان نیست و به‌طور منطقی انتظار می‌رود که در بعضی نقاط، بزرگ‌تر از سایر نقاط باشد، دارای ویژگی ناهمسانی‌واریانس است. هشدار ناشی از

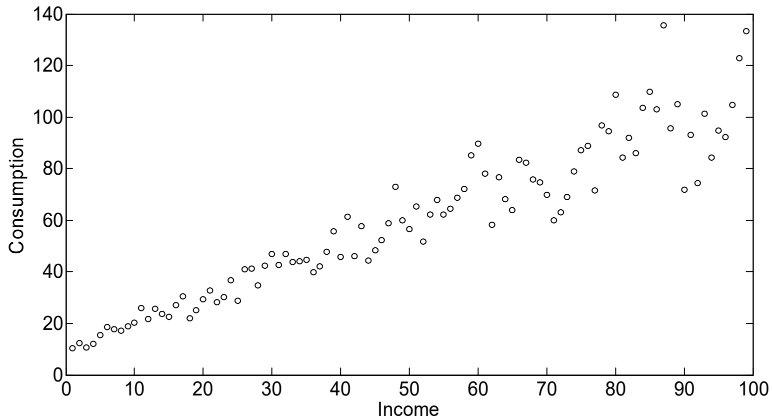
---

1. applied econometrics
2. least squares model
3. autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH)
4. generalized autoregressive conditional heteroskedasticity (GARCH)
5. heteroskedasticity
6. homoskedasticity

وجود ناهمسانی واریانس این است که ضرایب رگرسیون مربوط به یک رگرسیون حداقل مجذورات معمولی[1] هنوز بدون تورش[2] است، اما خطاهای معیار و فواصل اطمینان تخمینی حاصل از رویه‌های مرسوم آماری، بسیار باریک بوده و تصور نادرستی از دقت مدل به‌دست می‌دهد. بدین معنی که دقت مدل را بیش از واقع نشان می‌دهد. مدل‌های خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس مسألهٔ ناهمسانی‌واریانس را از طریق مدل‌سازی واریانس مرتفع می‌کند. در نتیجه نه‌تنها نواقص حداقل مجذورات رفع می‌شود، بلکه یک پیش‌بینی برای واریانس هر جملهٔ خطا ارایه می‌گردد. این پیش‌بینی خصوصاً در زمینهٔ مالی بسیار موردعلاقهٔ متخصصان است.

برای درک بیشتر ناهمسانی واریانس مثالی ارایه می‌کنیم. اگر به رابطهٔ مقطعی بین درآمد و مصرف خانوارها توجه کنیم، انتظار داریم که مصرف خانوارهای کم‌درآمد نسبت به خانوارهای پردرآمد، رابطهٔ نزدیک‌تری با درآمد داشته باشد، چراکه نرخ نهایی مصرف در خانوارهای کم‌درآمد نسبت به پردرآمد بیشتر است. خانوارهای فقیر پس‌انداز کمتری نسبت به خانوارهای پردرآمد دارند و بنابراین مصرف آن‌ها از طریق درآمدشان تأمین می‌شود. در یک رگرسیون مقطعی از مصرف خانوارها برروی درآمد، احتمالاً مقادیر مطلق جملات خطای خانوارهای پردرآمد نسبت به خانوارهای کم‌درآمد، به‌دلیل وجود پس‌انداز، بزرگ‌تر خواهد بود. بنابراین با افزایش درآمد، وجود رابطهٔ محکم بین درآمد و مصرف زیر سؤال می‌رود و در نتیجه فرض همسانی واریانس درست نخواهد بود. نمودار زیر گویای این مسأله است.

1. ordinary least squares regression
2. unbiased



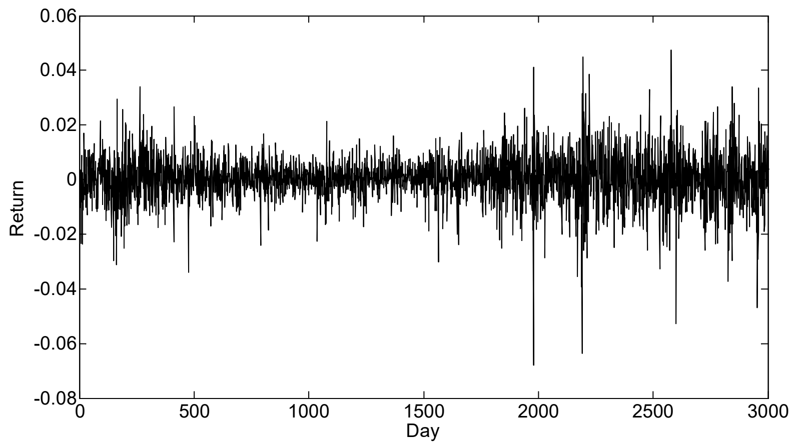
نمودار (۴–۸): ناهمسانی واریانس بر اساس رابطهٔ درآمد و مصرف

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید درآمد و مصرف در خانوارهای کم‌درآمد رابطهٔ واضح‌تری دارد. با افزایش درآمد این رابطه زیر سؤال می‌رود و بدین ترتیب استفاده از رگرسیون معمولی برای تشریح چنین رابطه‌ای، مشمول خطاهای قابل‌ملاحظه‌ای است.

گاهی متخصصان اقتصادسنجی کاربردی با سؤالی بدیهی در مورد دقت پیش‌بینی‌های صورت‌گرفته توسط مدل‌ها مواجه می‌شوند. در این‌جا مبحث کلیدی، واریانس جملات خطا و عاملی است که به بزرگ‌شدن آن‌ها منجر می‌شود. این پرسش اغلب در کاربردهای مالی مطرح می‌گردد و آن هنگامی است که متغیر وابستهٔ مدل، بازدهٔ دارایی یا سبد دارایی است و واریانس بازده نمایانگر سطح ریسک بازده‌های پیش‌بینی‌شده می‌باشد. حتی مرور سریع داده‌های مالی ما را به این نتیجه می‌رساند که برخی از دوره‌های زمانی، از دیگر دوره‌ها ریسکی‌تر است. یعنی ارزش موردانتظار مقادیر جملات خطا در برخی زمان‌ها بیشتر از زمان‌های دیگر است. به‌علاوه این زمان‌های ریسکی به‌صورت تصادفی در طی داده‌های سالانه یا ماهانه پراکنده نیست، بلکه درجه‌ای از خودهمبستگی در ریسکی‌بودن بازده‌های مالی وجود دارد. زمانی که تحلیل‌گران مالی به نمودارهای بازدهٔ روزانه همانند نمودار (۴–۹) نگاه می‌کنند، متوجه می‌شوند که دامنهٔ تلاطم بازده در طی زمان تغییر می‌کند. آن‌ها از این پدیده به‌عنوان خوشه‌بندی تلاطم[1] یاد می‌کنند، چراکه تلاطم‌های بزرگ و تلاطم‌های

1. volatility clustering

کوچک طی دوره‌های متوالی به احتمال بیشتری با هم مشاهده می‌شود. به عبـارتی دیگـر، تلاطم‌های بزرگ با هم و تلاطم‌های کوچک نیز با هم مجتمع شده و به زبان فنی تشکیل خوشه می‌دهند.



نمودار (۴-۹): خوشه‌بندی تلاطم در بازده‌های شاخص سود نقدی و قیمت بورس تهران

مــدل‌های خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمســانی‌واریانس و نــوع تعمیم‌یافتــهٔ آن یعنــی مدل‌های خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافته دقیقاً برای برخـورد بـا ایـن مجموعه از داده‌ها طرحی شده‌اند. آن‌ها به ابزارهای بسیار رایجی برای مواجهه با مدل‌های سری زمانی که از مشخصهٔ ناهمسانی واریانس برخوردارند، تبدیل شده‌اند. هـدف این‌گونـه مدل‌ها فراهم‌آوردن یک سنجهٔ ریسک (مانند انحراف‌معیار) است کـه بتـوان در تصـمیمات مالی مربوط به تحلیل ریسـک، انتخـاب سـبد دارایـی و قیمت‌گـذاری اوراق مشـتقه از آن استفاده نمود.

پس از این مقدمــه، بــه تشـریح مـدل‌های خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمســانی‌واریانس می‌پردازیم.

روند توسعهٔ مدل‌های *ARCH* و *GARCH*

هدف اصلی اقتصادسنجی در بررسی سری زمانی بازدهٔ مالی این اسـت کـه چگونـه از اطلاعات موجود برای پیش‌بینی میانگین (ارزش موردانتظار) و واریانس بازده استفاده نماید. درحالی‌که مدل‌های متعددی برای تشـریح نحـوهٔ شـکل‌گیری بـازده و انـدازه‌گیری بـازدهٔ

موردانتظار توسعه یافته است، تا قبل از معرفی خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس، روش دقیقی برای پیش‌بینی واریانس وجود نداشت. یک ابزار سادهٔ اولیه، انحراف‌معیار غلتان[1] است. این ابزار، روشی جهت محاسبهٔ انحراف‌معیار بر اساس تعداد ثابتی از جدیدترین داده‌هاست و چنین فرض می‌کند که تلاطم بازده در دورهٔ آتی، میانگین هم‌وزون مجذور باقیمانده‌های مربوط به تعداد ثابتی از مشاهدات دوره‌های قبلی است. در قسمت‌های قبل، این ابزار تحت عنوان میانگین متحرک ساده تشریح گردید. فرض اوزان برابر به‌نظر جالب نیست، چراکه می‌توان تصور نمود که حوادث اخیر، مهم‌ترند و بنابراین باید وزن بیشتری به آن‌ها اختصاص یابد. بدین ترتیب انحراف‌معیار غلتان با اوزان نمایی معرفی شد. ما در قسمت قبل از این روش تحت عنوان میانگین متحرک با اوزان نمایی یاد کردیم. تنها تفاوت این روش با روش انحراف‌معیار غلتان این است که به داده‌های جدیدتر، وزن بیشتری جهت محاسبهٔ انحراف‌معیار داده می‌شود. در هر دو ابزار به مشاهدات ماقبل پنجرهٔ غلتان وزن صفر تعلق می‌گیرد که از معایب عمدهٔ این دو مدل است، چراکه قسمتی از اطلاعات دور ریخته می‌شود.

سرانجام مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس در سال ۱۹۸۲ توسط انگل پیشنهاد شد.[2] این مدل، اوزان موجود در محاسبهٔ واریانس را به‌عنوان پارامترهایی مجهول در نظر می‌گیرد و به برآورد آن‌ها می‌پردازد و بنابراین اجازه می‌دهد که با توجه به داده‌ها، بهترین اوزان برای پیش‌بینی واریانس برآورد گردد.

مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس در سال ۱۹۸۶ توسط بولرسلف به مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافته، تعمیم یافت.[3] این مدل‌ها نیز همانند مدل‌های میانگین متحرک (ساده و نمایی)، میانگین موزون مجذور باقیمانده‌های دوره‌های قبلی است، اما دارای اوزانی است که پیوسته کاهش می‌یابد ولی هرگز صفر نمی‌شود. بدین معنی که اندازهٔ پنجرهٔ نمونه‌گیری با افزایش داده‌های تاریخی افزایش می‌یابد و از تمامی مشاهدات تاریخی برای پیش‌بینی تلاطم استفاده می‌شود. به‌علاوه، راه‌اندازی این مدل‌ها کم‌هزینه بوده و تخمین پارامترهای آن نسبتاً آسان است و در عین‌حال به‌طرز اعجاب‌برانگیزی در پیش‌بینی واریانس‌های مشروط موفق عمل می‌کند.

1. rolling standard deviation
2. Engle (1982).
3. Bollerslev (1986).

توسعهٔ مدل‌های *ARCH* و *GARCH*، انقلاب بزرگی در زمینهٔ مدل‌سازی تلاطم‌های تصادفی ایجاد کرد. اهمیت این مدل‌ها تا بدانجاست که جایزهٔ نوبل اقتصاد را در سال ۲۰۰۳ برای انگل به ارمغان آورد.

مدل‌های *ARCH* و *GARCH*

مطابق رایج‌ترین و ساده‌ترین مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافته، بهترین پیش‌بینی‌کنندهٔ واریانس دورهٔ بعدی، میانگین موزون متوسط واریانس بلندمدت[1]، واریانس پیش‌بینی‌شدهٔ دورهٔ جاری و اطلاعات جدید دورهٔ جاری است که از طریق آخرین مجذور باقیمانده به‌دست می‌آید.

به‌عنوان مثال، معامله‌گری را تصور کنید که می‌داند متوسط انحراف‌معیار بلندمدت روزانهٔ شاخص استاندارد اند پورز ۵۰۰[2]، یک درصد است. وی در روز گذشته، انحراف‌معیار شاخص را برای امروز ۲ درصد پیش‌بینی کرده و بازدهٔ غیرمنتظره امروز نیز ۳ درصد است. بدیهی است که با دوره‌های پرتلاطمی مواجهیم و خصوصاً امروز یک دورهٔ پرتلاطم است. مدل پیشنهاد می‌کند که پیش‌بینی روز آینده منعکس‌کنندهٔ تلاطم بیشتری باشد. با این‌حال این حقیقت که میانگین انحراف‌معیار بلندمدت تنها یک درصد است، پیش‌بینی‌کننده را به کاهش واریانس تخمینی رهنمون می‌شود. بهترین استراتژی برای برآورد واریانس به ارتباط بین روزها بستگی دارد. اگر این سه عدد را به توان دو برسانیم و به آن‌ها وزن یکسانی بدهیم، می‌توانیم پیش‌بینی روز آینده را به‌طریق زیر محاسبه کنیم:

$$\sqrt{\frac{1+4+9}{3}} = 2.16$$

به هر حال معامله‌گر به‌طور تجربی می‌داند که اگر به جای تخصیص اوزان مساوی، به‌ترتیب از وزن‌های ۰/۰۲، ۰/۹ و ۰/۰۸ برای این سه عدد استفاده کند، پیش‌بینی‌های دقیق‌تری خواهد داشت. بر این اساس، پیش‌بینی وی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sqrt{0.02\times 1+0.9\times 4+0.08\times 9} = 2.08$$

---

1. long-run average variance
2. Standard & Poors 500 (S&P 500)

بر اساس مثال فوق، مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافته را به‌صورت زیر فرموله می‌کنیم:

$$\begin{gathered}\sigma_t^2 = \omega + \alpha\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\,\sigma_{t-1}^2 \quad \varepsilon_t \sim N(0,\sigma_t{}^2) \\ \omega \geq 0,\ \alpha,\beta \geq 0,\ \alpha+\beta<1\end{gathered} \qquad (۴-۴۱)$$

σ_t^2: پیش‌بینی واریانس برای دورهٔ t

ε_{t-1}^2: مجذور باقیمانده (جملهٔ خطا) در دورهٔ $t\text{-}1$

σ_{t-1}^2: واریانس پیش‌بینی‌شده برای دورهٔ $t\text{-}1$

ω,α,β: پارامترهای مدل که برای پیش‌بینی واریانس دورهٔ t باید برآورد شود.

از آن‌جا که σ_t^2 پیش‌بینی تلاطم دورهٔ آتی بر اساس اطلاعات گذشته است، واریانس شرطی نامیده می‌شود. رابطهٔ (۴-۴۱) تابعی از سه عبارت است:

- میانگین (ω)
- اخبار راجع به تلاطم دورهٔ قبل که بر اساس مربع آخرین باقیمانده (ε_{t-1}^2) اندازه‌گیری می‌شود و به آن «عبارت $ARCH$»[۱] می‌گویند. این باقیمانده از مدل‌های پیش‌بینی بازده حاصل می‌شود.
- پیش‌بینی اخیر واریانس (σ_{t-1}^2) که به آن «عبارت $GARCH$»[۲] می‌گویند.

مدل (۴-۴۱)، نوع خاصی از مدل‌های خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافته است و اتفاقاً رایج‌ترین آن‌ها نیز می‌باشد. کاربرد این مدل آسان و تعداد پارامترهای آن کم است و اغلب برازش نسبتاً خوبی با داده‌ها دارد. در این مدل، واریانس دورهٔ آتی تنها با باقیمانده و واریانس پیش‌بینی‌شدهٔ یک دورهٔ قبل ارتباط برقرار می‌کند که آن را با $GARCH\,(1,1)$ نشان می‌دهند. دو عدد داخل پرانتز به‌ترتیب نمایان‌گر مرتبهٔ دوره‌هایی است که از باقیمانده‌ها و واریانس‌های پیش‌بینی‌شده استفاده می‌گردد.

1. ARCH term
2. GARCH term

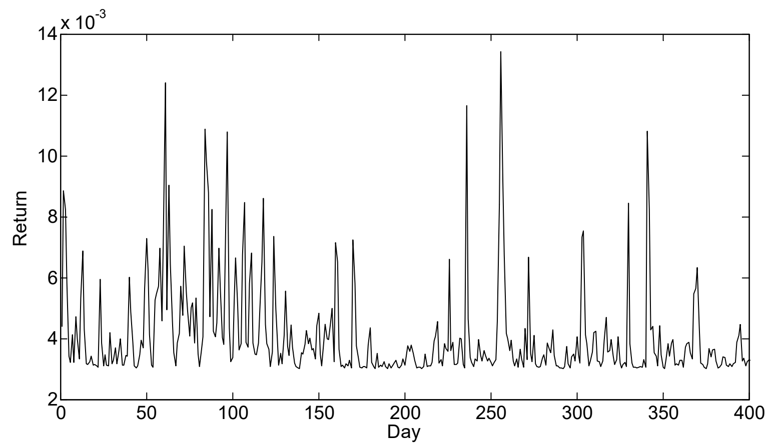
تعبیر پارامترها مشکل است، اما می‌توان گفت مقدار بالای ضریب β بدین معنی است که تلاطم‌ها باثبات است و مدتی طولانی جهت تغییر می‌طلبد. مقدار بالای α گویای این است که تلاطم‌ها حساس است و به‌سرعت نسبت به تحرکات بازار واکنش نشان می‌دهد. عموماً ضریب β دارای برآوردهایی بالای ۰/۷ است، اما α معمولاً کمتر از ۰/۲۵ می‌باشد.

ما یک مدل $GARCH(1,1)$ را برای سری شاخص بازدهٔ نقدی و قیمت بورس و اوراق بهادار تهران در طی دوره‌ای معین برازش کرده‌ایم. این مدل به‌صورت زیر است:

$$\sigma_t^2 = -0.000008 + 0.5\,\varepsilon_{t-1}^2 + 0.09\,\sigma_{t-1}^2 + \varepsilon_t \quad (۴۲-۴)$$

داده‌های این مدل، مشابه داده‌های نمودار (۴-۷) است. بر اساس مدل فوق، مقادیر برآوردشده برای پارامترهای آلفا و بتا به‌ترتیب ۰/۵ و ۰/۰۹ است.

در نمودار (۴-۱۰) پیش‌بینی‌های حاصل از مدل فوق برای دوره‌ای منتخب ارایه شده است. در این مورد خاص، برآوردهای تلاطم حاصل از مدل $GARCH$ نسبت به مشاهدات حساس است و اثر شوک موجود در حوالی $t=100$ در تخمین‌های $GARCH$ نسبت به تخمین‌های $EWMA$ بسیار زودتر ناپدید می‌شود.



نمودار (۴-۱۰): تلاطم تخمینی مدل GARCH(1,1) برای داده‌های بورس تهران

تلاطم‌های حاصل از مدل $GARCH(1,1)$ به همان متغیرهای $EWMA$ بستگی دارد، اما در $EWMA$ به‌جای سه پارامتر، یک پارامتر (λ) وجود دارد و ما می‌توانیم

$EWMA$ را به‌عنوان حالت خاصی از $GARCH(1,1)$ کـه در آن $\omega = 0$، $\alpha = 1-\lambda$ و $\beta = \lambda$ مدنظر قرار دهیم.

مدل $GARCH(1,1)$ با عرض از مبدأ (ω) مثبت به ما اجـازه می‌دهـد تـا تلاطـم را به‌صورت رجوع‌کننده به میانگین[1] مدل‌سازی کنیم. یعنی اگر تلاطم نسبتاً بالا باشد تمایـل به کاهش و اگر نسبتاً پایین باشد، تمایل به افزایش در طی زمان دارد. واریـانس بلندمـدت، یعنی مقداری که واریانس در بلندمدت به آن گرایش دارد، از رابطۀ زیر به‌دست می‌آید:

$$V = \frac{\omega}{(1-\alpha-\beta)} \quad (۴۳-۴)$$

بنابراین، معادلۀ (۴-۴۱) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} &\sigma_t^2 = (1-\alpha-\beta)V + \alpha\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\,\sigma_{t-1}^2 \\ &\Rightarrow \sigma_t^2 - V = \alpha(\varepsilon_{t-1}^2 - V) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - V) \end{aligned} \quad (۴۴-۴)$$

معادلۀ فوق را k دوره به جلو می‌بریم:

$$\sigma_{t+k}^2 - V = \alpha(\varepsilon_{t+k-1}^2 - V) + \beta(\sigma_{t+k-1}^2 - V) \quad (۴۵-۴)$$

با توجه به این‌که: $E(\varepsilon_{t+k-1}^2) = \sigma_{t+k-1}^2$ خواهیم داشت:

$$E(\sigma_{t+k}^2 - V) = (\alpha+\beta)(\sigma_{t+k-1}^2 - V) \quad (۴۶-۴)$$

بنابراین، پیش‌بینی واریانس برای k دورۀ زمانی آینده به‌صورت زیر خواهد بود:

$$E(\sigma_{t+k}^2) = V + (\alpha+\beta)^k\,(\sigma_t^2 - V) \quad (۴۷-۴)$$

از آن‌جا که $\alpha + \beta < 1$، جملۀ دوم در معادلۀ فوق بـا افـزایش k، کـاهش می‌یابـد و بدین ترتیب وقتی به آیندۀ دورتر نگـاه مـی‌کنیم، واریـانس پیش‌بینی‌شـده بـه V نزدیـک می‌شود. این موضوع، تعبیـر مـا از V بـه‌عنوان واریـانس بلندمـدت را تأییـد می‌کنـد. اگـر

1. mean-reverting

$\sigma^2 > V$، واریانس موردانتظار k دورهٔ آتی از V بزرگ‌تر است و اگـر $\sigma^2 < V$، واریـانس موردانتظار k دورهٔ آتی از V کوچک‌تر است. بنابراین، پیش‌بینی‌های $GARCH$ تمایل دارد که به‌طرف واریانس بلندمدت V بازگردد.

مدل تعمیم‌یافتهٔ $GARCH$ را به‌صورت زیر فرموله می‌کنیم:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \, \sigma_{t-j}^2 \quad (۴۸-۴)$$

در این مدل برای پیش‌بینی واریانس دورهٔ آتی از سری‌های مجذور باقیمانده با ۱ تا p وقفه و نیز از سری‌های واریـانس تخمینـی بـا ۱ تـا q وقفـه اسـتفاده می‌شـود و آن را بـا $GARCH(p,q)$ نشان می‌دهند. به بیانی دیگر می‌تـوان گفـت کـه p، مرتبـهٔ عبـارت $ARCH$ و q، مرتبهٔ عبارت $GARCH$ است.

مدل $ARCH$ شکل ساده‌تری از $GARCH$ است. در این‌جا برای پیش‌بینی واریانس هر دوره، از سری‌های مجذور باقیمانده با ۱ تا p وقفه استفاده می‌شود:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \varepsilon_{t-i}^2 \quad (۴۹-۴)$$

از آن‌جا که این مدلِ $ARCH$ بر اساس باقیمانده‌های ا تا p وقفه‌ای نوشته شده است، آن را با $ARCH(p)$ نمایش می‌دهند.

برآورد پارامترها

بـرای بـرآورد پارامترهـای مـدل $GARCH$ از روش حـداکثر درسـت‌نمایی اسـتفاده می‌شود. در این‌جا برای سادگی، به تشریح نحوهٔ تخمین پارامترهای مـدل $GARCH(1,1)$ می‌پردازیم. برای برآوردهای پارامترهای این مدل ابتدا فرض می‌شود که بازده، توزیع خاصی دارد. در این‌جا فرض می‌کنیم که بازده‌ها دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریـانس σ^2 است:

$$r \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad (۵۰-۴)$$

بدیهی است که این توزیع، یک توزیع شرطی است. یعنی بازده‌های هر دوره تنها مشروط بر پارامترهای تخمینی همان دوره نرمال است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$r_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2) \qquad (۵۱-۴)$$

از این‌جا به‌راحتی نتیجه می‌گیریم که جملات خطا در هر دوره، توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ_t^2 دارد:

$$\varepsilon_t = r_t - \mu_t \Rightarrow \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (۵۲-۴)$$

بنابراین، هر جملهٔ خطا بر اساس یک فرآیند تصادفی به‌شرح زیر ایجاد می‌شود:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t \qquad (۵۳-۴)$$

که z_t متغیری دارای توزیع نرمال‌استاندارد است. بنابراین، باقیمانده‌های استانداردشده دارای توزیع نرمال‌استاندارد است:

$$z_t \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \sim N(0,1) \quad (۵۴-۴)$$

برای تخمین پارامترهای مدل $GARCH(1,1)$ نسبت فوق یا همان باقیمانده‌های استانداردشده را برای هر دوره استخراج می‌کنیم. صورت این کسر شامل باقیماندهٔ هر دوره است و همان‌طور که می‌دانیم این باقیمانده اختلاف بین بازدهٔ یک دوره و بازدهٔ موردانتظار آن دوره می‌باشد. بازدهٔ موردانتظار هر دوره بر اساس رابطهٔ شکل‌گیری بازدهٔ قیمت‌ها حاصل می‌شود و جزء قطعی رابطهٔ شکل‌گیری بازدهٔ قیمت‌ها می‌باشد. مثلاً، در مدل گشت تصادفی، بازدهٔ موردانتظار هر دوره صفر است و به‌همین دلیل اگر از این مدل استفاده کنیم، باقیماندهٔ هر دوره برابر با بازدهٔ تحقق‌یافتهٔ همان دوره است.
مخرج این کسر شامل انحراف‌معیارهای پیش‌بینی‌شدهٔ هر دوره است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} = \frac{r_t - E(r_t)}{\sqrt{\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2}} \quad (۵۵-۴)$$

این نسبت دارای توزیع نرمال‌استاندارد است و مخرج آن شامل پارامترهای مدل است. تخمین پارامترها با روش حداکثر درست‌نمایی صورت می‌گیرد. مبنای این روش این است که پارامترهای ω، α و β چه مقداری داشته باشند تا چگالی احتمال مشترک z_t حداکثر شود. اگر به اندازهٔ T مشاهده داشته باشیم، با فرض این‌که سری متغیر z_t دارای توزیع یکسان و مستقل از هم است، چگالی احتمال مشترک آن‌ها برابر با حاصل‌ضرب چگالی‌هاست. بنابراین، می‌توان پارامترها را با حداکثرکردن تابع احتمال برآورد کرد:

$$\max L = \max \prod_{t=1}^{T} \varphi_t\left(z_t \middle| \mu_t, \sigma_t\right) = \max \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z_t^2}{2} \right) \right) \quad (۵۶-۴)$$

که L تابع احتمال، φ_t تابع چگالی احتمال نرمال‌استاندارد برای دورهٔ t و $\prod$ شمارش‌گر ضرب است.

در اغلب موارد، بیشینه‌سازی تابع لگاریتمی ساده‌تر است. تابع لگاریتم احتمال یک تابع افزایشی است بنابراین، هر پارامتری که L را حداکثر سازد، باعث حداکثرشدن $ln \ L$ نیز می‌شود. به همین دلیل تابع لگاریتم احتمال را حداکثر می‌کنیم:

$$\max \ln L = \max \ln \prod_{t=1}^{T} \varphi_t\left(z_t \middle| \mu_t, \sigma_t\right) = \max \ln \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z_t^2}{2} \right) \right)$$
$$= \max \sum_{t=1}^{T} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{z_t^2}{2} \right)$$
(۵۷-۴)

توجه داشته باشید که مدل‌های $GARCH$ را می‌توان بر توزیع‌هایی غیر از توزیع نرمال نیز برازش کرد. به‌عنوان مثال، می‌توان توزیع t را به بازده‌ها نسبت داد و پارامترها را از طریق حداکثرکردن تابع احتمال توزیع t برآورد نمود.

نسخه‌های دیگر مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافته

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، مدل‌های خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس در سال ۱۹۸۲ توسط انگل و مدل تعمیم‌یافتهٔ آن در سال ۱۹۸۶ توسط بولرسلف ارایه گردید.

از آن به بعد به‌دلیل اهمیت و کاربرد فراوان این‌گونه مدل‌ها، انواع و اقسام نسخه‌های آن توسط سایر متخصصان توسعه یافت. برخی از مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

- خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتهٔ جامع
- خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتهٔ عاملی
- خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافته در میانگین
- خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتهٔ نامتقارن
- خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتهٔ ترکیبی

خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتهٔ جامع[1]

خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتهٔ جامع، از نسخه‌های معروف خانوادهٔ مدل‌های $GARCH$ است. این مدل زمانی به‌کار می‌رود که سری بازده ایستا نباشد. سری بازده معمولاً ایستا نیست و بنابراین واریانس بلندمدت (V) وجود ندارد. در مدل سه پارامتری این حالت مربوط به زمانی است که $\alpha + \beta$ در معادلهٔ (۴-۴۱) برابر با یک شود. در این حالت مدل $GARCH\,(1,1)$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + (1-\beta)\,\varepsilon_{t-1}^2 \quad (۴\text{-}۵۸)$$

این مدل اغلب در بازارهای ارز مورد استفاده قرار می‌گیرد و زمانی که $\omega = 0$ است، به مدل میانگین متحرک با اوزان نمایی تبدیل می‌شود که یک مورد خاص از آن است.

مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتهٔ عاملی[2]

مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتهٔ عاملی، یکی دیگر از مدل‌های سودمند خانوادهٔ $GARCH$ است. این مدل تخمین تعدادی از تلاطم‌ها (و همبستگی‌ها) را بر اساس یک تخمین از واریانس، میسر می‌سازد. در حالت استاندارد، می‌توان تعدادی از تلاطم‌ها را بر اساس یک شاخص تلاطم بازار تخمین زد. به‌عنوان مثال،

---

1. integrated GARCH (IGARCH)
2. factor GARCH (FGARCH)

ممکن است n دارایی مختلف داشته باشیم که بازدهٔ آن‌ها از طریق مدل تک‌شاخصی به بازدهٔ بازار مرتبط می‌شود.

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i I_t + \varepsilon_{it} \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (۵۹-۴)$$

همان‌طور که می‌دانیم، در مدل تک‌شاخصی با فرض این‌که جملات خطا ناهمبسته بوده و کوواریانس بازدهٔ دارایی و شاخص بازار صفر است، واریانس دارایی i در دورهٔ t به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{it}^2 = \beta_i^2 \sigma_{I_t}^2 + \sigma_{\varepsilon_{it}}^2 \quad (۶۰-۴)$$

برای کاربرد مدل $FGARCH$، ابتدا بر اساس رابطهٔ (۴-۵۹) تخمین‌هایی از مقادیر β_i و $\sigma_{\varepsilon_{it}}^2$ به‌دست می‌آوریم. سپس از یک مدل استاندارد یک متغیرهٔ $GARCH$ برای تخمین تلاطم بازار ($\sigma_{I_t}^2$) استفاده می‌کنیم و تخمین‌های خود از پارامترها را برای به‌دست‌آوردن برآوردهایی از تلاطم دارایی‌های منفرد در رابطهٔ (۴-۶۰) قرار می‌دهیم.

مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافته در میانگین[1]

اگر واریانس شرطی را در رابطهٔ میانگین وارد کنیم، مدل حاصل، $GARCH$ در میانگین یا $GARCH\text{-}M$ نامیده می‌شود:

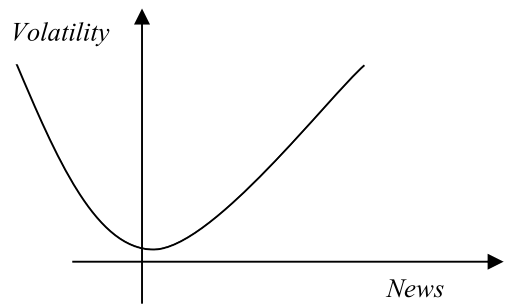
$$r_t = d_t + \gamma \sigma_t^2 + \varepsilon_t \quad (۶۱-۴)$$

که d_t جزء قطعی رابطهٔ شکل‌گیری بازدهٔ قیمت و یا همان رابطهٔ میانگین می‌باشد و γ پارامتری است که مقدار آن به نقش واریانس شرطی در تشریح بازده بستگی دارد. در نسخهٔ دیگری از $GARCH\text{-}M$ از انحراف‌معیار شرطی به‌جای واریانس شرطی استفاده می‌شود. مدل $GRCH\text{-}M$ اغلب هنگامی مورد استفاده قرار می‌گیرد که بازدهٔ موردانتظار یک دارایی به ریسک موردانتظار آن مربوط است. ضریب تخمینی برای ریسک موردانتظار (γ)، معیاری از موازنهٔ ریسک–بازده است.

1. GARCH-in-mean model

مدل‌های خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتهٔ نامتقارن[1]

اغلب مشاهده می‌شود که حرکات روبه‌پایین[2] بازدهٔ سهام نسبت به حرکات روبه‌بالا[3] با همان اندازه، تلاطم‌های بزرگ‌تری را به‌دنبال دارد. به نمودار زیر توجه کنید:



نمودار (۴-۱۱): عدم‌تقارن اثر اخبار خوب و بد در تلاطم

انگل و ان‌جی اثر نامتقارن اخبار را با چنین نموداری تشریح کردند.[4] این نمودار نشان می‌دهد که اولاً اخبار عامل اصلی ایجاد تلاطم در بازدهٔ سهام است و ثانیاً اثر اخبار خوب و بد در تلاطم‌ها به‌صورت متقارن نیست. اخبار بد نسب به اخبار خوب بیشتر موجب تلاطم بازدهٔ سهام می‌شود.

برای احتساب عدم‌تقارن واریانس، مدل‌های مختلفی طراحی شده است که در این میان $TGARCH$ و $EGARCH$ دو مدل معروف است. هم‌اکنون به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتهٔ آستانه[5]

مدل $TGARCH$ توسط زاکویان[1] و نیز گلوستن، جاناتان و رونکل[2] معرفی شد. رابطهٔ واریانس شرطی این مدل به‌صورت زیر است:

1. asymmetric GARCH models
2. downward movements
3. upward movements
4. Engle and NG (1993).
5. threshold GARCH (TGARCH)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad (۶۲-۴)$$

که I_t تابع معرف است و طبق تعریف عبارت است از:

$$I_t = \begin{cases} 1 & if \quad \varepsilon_t < 0 \\ 0 & if \quad \varepsilon_t \geq 0 \end{cases} \quad (۶۳-۴)$$

در این مدل، اخبار خوب ($\varepsilon_t > 0$) و اخبار بد ($\varepsilon_t < 0$) اثرات متفاوتی بر واریانس شرطی دارد. اخبار خوب دارای اثر α است درحالی‌که اثر اخبار بد $\alpha + \gamma$ است. اگر $\gamma > 0$، می‌گوییم که اثر اهرم[۳] وجود دارد و اگر $\gamma \neq 0$، اثر اخبار، نامتقارن است. برای مدل‌های $TGARCH$ با مراتب بالاتر می‌توان نوشت:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (۶۴-۴)$$

مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتهٔ نمایی[۴]

مدل $EGARCH$ توسط نلسون معرفی شد.[۵] رابطهٔ این مدل به‌صورت زیر است:

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \alpha\left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right| + \gamma\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta\log(\sigma_{t-1}^2) \quad (۶۵-۴)$$

سمت چپ این رابطه، لگاریتم واریانس شرطی است. این رابطه نشان می‌دهد که اثر اهرم بیشتر از این‌که درجهٔ دو[۶] باشد، نمایی است. نامنفی‌بودن پیش‌بینی‌های واریانس شرطی در این رابطه تضمین می‌شود. وجود اثرات اهرم را می‌توان با آزمون فرضیهٔ $\gamma \leq 0$ نشان داد. درصورتی‌که $\gamma \neq 0$، اثر اخبار، نامتقارن است.

نسخهٔ اصلی $EGARCH$ یعنی مدل اولیهٔ نلسون دارای رابطه‌ای به قرار زیر است:

---

1. Zakoian (1990).
2. Glosten, Jagnnathan and Runkle (1993).
3. leverage effect
4. exponential GARCH (EGARCH)
5. Nelson (1991).
6. quadratic

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \alpha\left(\left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + \gamma\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta\log(\sigma_{t-1}^2) \quad (۶۶-۴)$$

این رابطه از دو جهت با رابطهٔ (۴-۶۵) متفاوت است. اول این‌که نلسون فرض کرد که ε از توزیع خطای تعمیم‌یافته تبعیت می‌کند در حالی‌که در رابطهٔ قبلی فرض می‌شود که خطاها دارای توزیع نرمال است. دوم این‌که رابطهٔ نلسون برای لگاریتم واریانس شرطی کمی با رابطهٔ (۴-۶۵) متفاوت است. تخمین مدل نلسون با فرض نرمال‌بودن خطاها برآوردهایی همانند رابطهٔ (۴-۶۶) ارایه می‌دهد و تنها در برآورد پارامتر ω به اندازهٔ $\alpha\sqrt{2/\pi}$ تفاوت دارد.

برای مدل‌های مراتب بالاتر $EGARCH$ داریم:

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^{p}\left(\alpha_i\left|\frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}}\right| + \gamma_i\frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}}\right) + \sum_{i=1}^{q}\beta_j\log(\sigma_{t-j}^2) \quad (۶۷-۴)$$

مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتهٔ ترکیبی[1]

مدل استاندارد خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس، دارای تلاطمی است که به یک مقدار بلندمدت یا به یک سطح پایه نزدیک می‌شود. این سطح پایه به پارامترهای مدل بستگی دارد، اما این پارامترها در طی زمان ثابت است. این امر تا حدی باعث ایجاد محدودیت در دقت برآوردهای مدل می‌شود، اما می‌توان آن را با استفاده از مدل $CGARCH$ مرتفع نمود. به‌عنوان مثال اگر از مدل $GARCH(1,1)$ استفاده می‌کنیم، می‌توانیم مقدار ثابت V را با یک معادلهٔ پایهٔ تلاطم تعویض کنیم:

$$V_t = \overline{\omega} + \rho(V_{t-1} - \overline{\omega}) + \phi(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) \quad (۶۸-۴)$$

که V_t تلاطم بلندمدت متغیر با زمان[1] است. $\overline{\omega}$، ρ و ϕ پارامترهای این معادله است. این معادله، تغییر تلاطم پایه را در پاسخ به شرایط بازار ممکن می‌سازد و تشریح‌کنندهٔ مؤلفهٔ

1. components GARCH (CGARCH)

پایدار[۲] یعنی V_t است که با توان ρ به $\overline{\varpi}$ هم‌گرا می‌شود. ρ عموماً بین ۰/۹۹ و ۱ است. بنابراین، V_t بسیار آهسته به $\overline{\varpi}$ نزدیک می‌شود. در واقع مدل $CGARCH$ امکان بازگشت به میانگین[۳] را به سمت یک سطح متغیر فراهم می‌کند. رابطهٔ (۴-۶۸) به‌همراه رابطهٔ زیر مدل $CGARCH$ را تعریف می‌کند:

$$\sigma_t^2 - V_t = \alpha(\varepsilon_{t-1}^2 - V_{t-1}) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - V_{t-1}) \quad (۴\text{-}۶۹)$$

در این رابطه، σ_t^2 همان واریانس شرطی است. این رابطه تشریح‌کنندهٔ مؤلفه ناپایدار[۴] یعنی $\sigma_t^2 - V_t$ است که با توان $\alpha + \beta$ به صفر نزدیک می‌شود. می‌توانیم روابط (۴-۶۸) و (۴-۶۹) را با هم ترکیب کنیم:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= (1-\alpha-\beta)(1-\rho)\overline{\varpi} + (\alpha+\phi)\varepsilon_{t-1}^2 \\ &\quad - (\alpha\rho + (\alpha+\beta)\phi)\varepsilon_{t-2}^2 + (\beta-\phi)\sigma_{t-1}^2 - \left(\beta\rho - (\alpha+\beta)\phi\right)\sigma_{t-2}^2\end{aligned} \quad (۴\text{-}۷۰)$$

که نشان می‌دهد مدل ترکیبی یک مدل محدودشدهٔ $GARCH(2,2)$ است.

این امکان وجود دارد که متغیرهای برون‌زایی را در معادلهٔ واریانس شرطی مدل ترکیبی وارد کنیم. این متغیرها را می‌توان در معادلهٔ تشریح‌کنندهٔ مؤلفهٔ پایدار، ناپایدار و یا هر دو وارد کرد. متغیرهای موجود در معادلهٔ ناپایدار در حرکات کوتاه‌مدت تلاطم اثرگذارند در حالی‌که متغیرهای موجود در معادلهٔ پایدار، سطح تلاطم بلندمدت را تحت تأثیر قرار می‌دهند.

هم‌چنین می‌توانیم مدل $CGARCH$ را با احتساب عدم‌تقارن در نظر بگیریم. چنین مدلی، $CGARCH$ نامتقارن[۵] نام دارد. برای طراحی چنین مدلی اثرات عدم‌تقارن را در معادلهٔ ناپایدار داخل کرده و مدل‌هایی به‌صورت زیر را برآورد می کنیم:

$$V_t = \overline{\varpi} + \rho(V_{t-1} - \overline{\varpi}) + \phi(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) + \theta_1 Z_{1t} \quad (۴\text{-}۷۱)$$

---

1. time varying long run volatility
2. permanent component
3. mean reversion
4. transitory component
5. asymmetric CGARCH

$$\sigma_t^2 - V_t = \alpha(\varepsilon_{t-1}^2 - V_{t-1}) + \gamma(\varepsilon_{t-1}^2 - q_{t-1})I_{t-1} + \beta(\sigma_{t-1}^2 - V_{t-1}) + \theta_2 Z_{2t}$$
(۷۲-۴)

که z_{1t} و z_{2t} متغیرهای برون‌زا می‌باشند.

تلاطم ضمنی[1]

یک رویکرد بسیار متفاوت برای تخمین تلاطم، استفاده از تلاطم ضمنی به‌دست‌آمده از قیمت‌های اختیارمعامله است. ایدهٔ پشت این رویکرد این است که اگر دارایی موردنظر دارای اختیارمعامله باشد و ما از مقادیر دیگر متغیرهای موجود در رابطهٔ قیمت‌گذاری اختیارمعامله خبر داشته باشیم، می‌توانیم بر اساس قیمت اختیارمعامله، مقدار تلاطم سازگار با آن قیمت را استخراج کنیم. به‌عنوان مثال، فرض کنید که ما داده‌های مربوط به قیمت‌گذاری یک اختیارخرید اروپایی را داریم. همچنین در نظر داشته باشید که قیمت‌گذاری این اختیارمعامله از طریق روش استاندارد بلک–شولز صورت می‌گیرد. با فرض این‌که تمامی شرایط بلک–شولز حفظ شود (یعنی فرآیند پایهٔ شکل‌گیری قیمت‌های دارایی تعهدشده، یک حرکت براونی هندسی[2] باشد و این دارایی سود تقسیمی پرداخت نکند)، نظریهٔ اساسی بلک–شولز به ما می‌گوید که قیمت این اختیارمعامله (c) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rt}N(d_1 - \sigma\sqrt{t}) \quad (۷۳\text{-}۴)$$

که:

$$d_1 = \frac{Ln(S/X) + (r_f + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad (۷۴\text{-}۴)$$

که S قیمت جاری سهم، X قیمت توافقی، r_f نرخ بهرهٔ بدون ریسک، t مدت زمان باقیمانده تا سررسید بر حسب سال، σ تلاطم دارایی تعهدشده[3] و $N(.)$ مقدار

---

1. implied volatility
2. geometric Brownian motion
3. underlying asset

توزیع تجمعی نرمال‌استاندارد است. تصور کنید که مقادیر تمامی این متغیرها را بـه غیـر از تلاطم می‌دانیم. بنابراین، اگر مدل درست باشد، می‌توانیم از رابطهٔ فوق برای به‌دست‌آوردن تلاطم مربوطه استفاده کنیم. تلاطم‌های ضمنی به‌ندرت دارای راه‌حل‌های بسته است ولـی راه‌اندازی آن‌ها در یک برنامهٔ صفحه گسـترده بـا اسـتفاده از روش‌هـای دونیم‌سـازی[1] یـا نیوتن–رافسون[2] بسیار ساده است.

مزیت‌های تلاطم ضمنی

تلاطم ضمنی یک تخمین گذشته‌نگر از تلاطم نیست، بلکه یک پیش‌بینی آینده‌نگر از تلاطم برای مدت زمان باقی‌مانده تا سررسید اختیارمعامله است. بنـابراین، تلاطـم ضـمنی دارای دو مزیت بزرگ نسبت به سایر روش‌های تاریخ محور است: تلاطم ضمنی اطلاعاتی را که دیگر رویکردها از آن صرف‌نظر می‌کند (مانند انتظـارات قریـب‌الوقوع کـاهش ارزش ارزی که تاکنون ثابت بوده) در محاسبات تلاطم دخیل می‌کند و نیز برآوردهایی از تلاطـم فراهم می‌آورد که فعالان مجرب بازار نسبت به آن اطمینان کافی دارند و از این بابت برسر پول خود شرط‌بندی می‌کنند. به‌همین دلیل اعتقاد عمومی بر این است کـه پیش‌بینی‌هـای تلاطم ضمنی بهتر از پیش‌بینی‌های تاریخ‌محور است.

محدودیت‌های تلاطم ضمنی

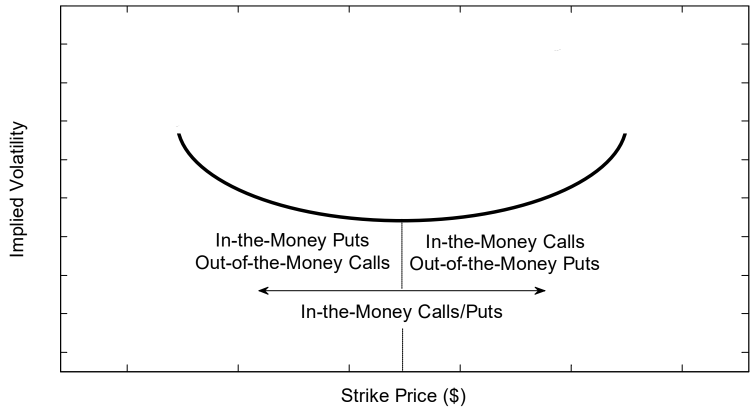
به‌هرحال درستی روش تلاطم ضمنی جهت برآورد تلاطم، مشروط بـر صـحت مـدل مورد استفاده است. اگر مدل داری تورش یا اشکالات دیگری باشد، تخمین‌هایی همـراه بـا تورش یا اشکال ارایه می‌دهد. این یک مشکل اساسی اسـت، چراکـه مـدل‌های اسـتاندارد قیمت‌گذاری اختیارمعامله، محـدودیت‌های شناخته‌شـده‌ای دارد. بیشـتر آن‌هـا هزینـه‌های معاملـه[3]، دامنـک قیمـت پیشـنهادی خریـد و فـروش[4]، اثـر عدم‌نقـدینگی بـازار[5] و دیگـر نارسایی‌های بازار[6] را نادیده می‌گیرند. این مدل‌ها هم‌چنین مشکلات اساسی‌تری در رابطـه

1. bisection methods
2. Newton-Raphson
3. transaction costs
4. bid-ask spreads
5. market illiquidity
6. market imperfections

با برخی از مفروضات کلیدی خود دارند. این مشکلات شامل مسائل موجود در مدل بلک-شولز است که معروف به «چاله‌های بلک-شولز»[1] می‌باشد. چاله‌های بلک-شولز ناظر بر مفروضاتی همچون تبعیت دارایی تعهدشده از یک حرکت برآونی هندسی، ثابت‌بودن نرخ بهره بدون ریسک و مانند آن می‌باشد. نقض این مفروضات باعث ایجاد پدیده‌هایی مانند لبخندهای تلاطم[2] و چولگی‌های تلاطم[3] می‌شود که به‌طور جدی استخراج تلاطم ضمنی را امری غامض می‌نماید. به‌عنوان مثال، پدیدهٔ لبخند تلاطم وقتی حادث می‌شود که با تعدادی برآورد مختلف از تلاطم ضمنی مواجه شویم. این برآوردها، ناشی از وجود تعدادی اختیارمعاملهٔ هم سررسید برای یک دارایی است. در این حالت، مسأله مهم این است که کدام تلاطم ضمنی تطابق بیشتری با واقعیت آتی تلاطم دارایی دارد.

در نمودار (۴-۱۲) پدیدهٔ لبخند تلاطم ارایه شده است. همان‌طور که در شکل نمایان است، وجود تعداد زیادی اختیارمعامله با یک سررسید برای یک دارایی موجب می‌شود که مدل قیمت‌گذاری بلک-شولز برآوردهای مختلفی را از تلاطم ضمنی دارایی ارایه دهد. بدیهی است که این برآوردهای مختلف از تفاوت در قیمت‌های توافقی این قراردادها نشأت می‌گیرد. در این حالت ممکن است دریک زمان اختیارمعامله‌های زیر قیمت[4]، بالای قیمت[5] و سربه‌سر[6] با سررسید یکسان برای یک دارایی تعهدشده موجود باشد که مدل، تلاطم ضمنی هرکدام را متفاوت از دیگری محاسبه می‌کند. به‌هرحال این مشکلات وجود دارد و معامله‌گران اختیارمعامله روش‌های پیشرفته‌ای را جهت مواجهه با آن‌ها توسعه داده‌اند.

1. holes in Black-Scholes
2. volatility smiles
3. volatility skews
4. out of money
5. in the money
6. at the money



نمودار (۴–۱۲): اختیارمعامله و پدیدهٔ لبخند تلاطم

تلاطم‌های ضمنی دارای محدودیت دیگری نیز می‌باشد. آن‌ها فقط برای دارایی‌هـایی موجودند که دارای اختیارمعامله‌اند. یعنی تنها برای مجموعهٔ کوچکی از دارایی‌ها می‌تـوانیم تلاطم ضمنی محاسبه کنیم.

مدل‌های پیش‌بینی کوواریانس‌ها و همبستگی‌ها

تا این‌جا نحوهٔ پیش‌بینی تلاطم دارایی‌های منفرد مورد بررسی قرار گرفت، اما از نحوهٔ تخمین تلاطم سبد دارایی که شامل در نظرگرفتن ارتباطات میان دارایی‌های موجود در سبد و وزن هر یک از دارایی‌های موجود در آن است، سخنی به میان نیامد. در این بخش هدف ما پرداختن به همین موضوع است و در واقع قصد داریم که دیدگاه خـود را تغییـر دهـیم و دارایی‌ها را نه به‌صورت مجزا از هم بلکه به‌صورت مجموعه‌ای مرتبط با هم در نظر آوریم.

به‌تعداد مدل‌های موجـود بـرای پیش‌بینـی تلاطـم، مـدل‌هایی نیـز بـرای پیش‌بینـی کوواریانس‌ها و همبستگی‌ها وجود دارد که هم‌اکنون به معرفی برخی از آن‌ها می‌پردازیم.

مدل میانگین متحرک ساده

برآورد کوورایانس‌ها و یا همبستگی‌ها، به‌طور مستقیم مـوازی بـرآورد تلاطم‌هاسـت. ابتدایی‌ترین روش برآورد، میانگین متحرک ساده یا همان میانگین متحرک بـا اوزان برابـر است که رابطهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$\sigma_{12,t}=\frac{1}{k}\sum_{S=t-k}^{t-1}(r_{1s}-\mu_1)(r_{2s}-\mu_2) \quad (۷۵-۴)$$

در این رابطه، $\sigma_{12,t}$ کوواریانس بازدهٔ دارایی یک و دو در زمان t است. r_{1s}، «s»امین بازدهٔ دارایی یک و r_{2s}، «s»امین بازدهٔ دارایی دو است. μ_1 و μ_2 نیز به‌ترتیب میانگین بازدهٔ دارایی یک و دو است. k هم حجم نمونه می‌باشد. مسألهٔ تعیین حجم نمونه همواره ذهن متخصصان را به خود مشغول ساخته است. حجم نمونه باید به‌گونه‌ای باشد که جهت ایجاد تخمین‌هایی منطقی از کوواریانس، به اندازهٔ کافی بزرگ و از طرفی دیگر، جهت حساس‌بودن نسبت به اخبار بازار، به اندازهٔ کافی کوچک باشد. به‌هرحال باید در ذهن داشته باشیم که ضرایب همبستگی تخمینی با افزایش تعداد دوره‌های نمونه، بدون توجه به این‌که آیا بازده‌ها مشترکاً ایستا[1] می‌باشند یا نه، گرایش به ثبات بیشتری دارند. بنابراین، باید به این موضوع توجه کنیم که همبستگی‌ها ممکن است تنها به این دلیل با ثبات باشند که از تعداد دوره‌های زیادی برای برآورد آن‌ها استفاده کرده‌ایم.

ضریب همبستگی از طریق رابطهٔ زیر قابل‌محاسبه است.

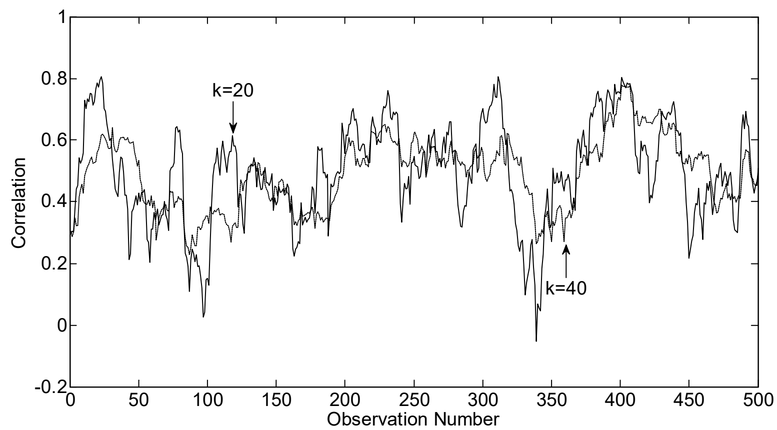
$$\rho_{12,t|t-1}=\frac{\sigma^2_{12,t|t-1}}{\sigma_{1,t|t-1}\sigma_{2,t|t-1}} \quad (۷۶-۴)$$

در این رابطه $\rho_{12,t|t-1}$ ضریب همبستگی سهم یک و دو در زمان t مشروط بر اطلاعات موجود تا زمان $t\text{-}1$ است. $\sigma^2_{1t|t-1}$ و $\sigma^2_{2t|t-1}$ به‌ترتیب واریانس دارایی یک و دو در زمان t مشروط بر اطلاعات موجود تا $t\text{-}1$ و $\sigma^2_{12,t|t-1}$ نیز کوواریانس بازدهٔ دارایی یک و دو در زمان t مشروط بر اطلاعات موجود تا زمان $t\text{-}1$ می‌باشد که معادل $\sigma^2_{12,t}$ در رابطهٔ (۴-۷۵) است. بدیهی است که تمامی واریانس‌ها، کوواریانس‌ها و ضرایب همبستگی که در این فصل به معرفی آن‌ها می‌پردازیم، مشروط بر اطلاعات گذشته است و گاهی برای تأکید بر این موضوع آن‌ها را با علامت مشروط نشان می‌دهیم.

در نمودار زیر برآوردهای همبستگی بر اساس روش میانگین متحرک ساده ارایه شده است. اندازهٔ پنجره‌های غلتان، ۲۰ و۴۰ است. بازده‌ها بر اساس توزیع چندمتغیرهٔ نرمال با

1. jointly stationary

همبستگی واقعی ۰/۵ شبیه‌سازی شده‌اند ولی با این وجود، هر دو برآورد در بازهٔ نسبتاً پهنی تلاطم می‌کند و همین نشان‌دهندهٔ قابل‌اتکانبودن این برآوردکننده است. همان‌گونه که انتظار داریم برآوردهای باثبات‌تر، از نمونهٔ بزرگ‌تر حاصل می‌شود، اما همین برآوردهای کم‌تلاطم‌تر نیز نسبتاً پرتلاطم به‌نظر می‌رسد، چراکه از یک طرف به ۰/۷۷۵ و از طرف دیگر به ۰/۲۲۵ می‌رسد و نمایندهٔ خوبی برای همبستگی واقعی نمی‌باشد.



نمودار (۴-۱۳): برآورد همبستگی بر اساس میانگین متحرک ساده برای بازده‌های شبیه‌سازی‌شده

تخمین‌های همبستگی، اغلب از شوک‌های منحصربه‌فرد مصون است. چنین شوک‌هایی هیچ اثر مشخصی بر هیچ کدام از همبستگی‌های گذشته‌نگر ندارد و این در حالی است که تجربهٔ بازار به ما نشان می‌دهد که بازارها گرایش دارند به شوک‌های بزرگ از طریق تشدید همبستگی‌ها پاسخ دهند. همبستگی‌های شدت‌یافته یکی از ویژگی‌های بحران‌های بازار[1] است.

به‌هرحال با وجود این‌که اثرات شبح برای همبستگی‌ها از اهمیت زیادی برخوردار نیست، احتمالاً برای کوواریانس‌ها دارای اهمیت است، چراکه مطابق رابطهٔ (۴-۷۴) کوواریانس را می‌توان به‌عنوان حاصل‌ضرب همبستگی در انحراف‌معیارهای بازدهٔ دو دارایی در نظر گرفت و همان‌گونه که می‌دانیم، تلاطم‌ها متحمل اثرات شبح می‌شود. بنابراین، اثرات شبح موجود در برآوردهای تلاطم به برآوردهای کوواریانس منتقل می‌شود.

1. market crises

مدل میانگین متحرک با اوزان نمایی

می‌توان کوواریانس‌ها را با استفاده از روش میانگین موزون نمایی برآورد کرد. در این روش، کوواریانس از طریق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{12,t} = (1-\lambda)\sum_{S=t-k}^{t-1}\lambda^{t-s-1}(r_{1s}-\mu)(r_{2s}-\mu) \quad (۷۷-۴)$$

ویژگی‌های این روش دقیقاً همانند روش ذکر شده برای تخمین واریانس دارایی است. هر چه λ کوچک‌تر باشد، با گذشت زمان اوزان با سرعت بیشتری کاهش می‌یابند.

مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافته

در روش میانگین متحرک با اوزان نمایی علاوه بر این‌که اثرات شوک‌های بازار تا خروج شوک از نمونه به‌طرز قابل‌ملاحظه‌ای بر کوواریانس محاسبه‌شده اثر می‌گذارد، کوواریانس‌های تخمینی از طریق این روش با محدودیت‌هایی مواجه است. مثلاً، در این روش همانند میانگین متحرک ساده به مشاهدات ماقبل پنجرهٔ نمونه‌گیری وزن صفر تعلق می‌گیرد. راه‌حل بدیهی این مسائل، تخمین کوواریانس‌ها با مدل‌های خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس است. مدل‌های کوواریانس این روش به‌طور مستقیم قابل‌استخراج از مدل‌های تلاطم آن می‌باشد. مدل کوواریانس بر اساس روش $GARCH\,(1,1)$ به‌صورت رابطهٔ زیر است:

$$\sigma_{12,t} = \omega_{12} + \alpha_{12}\,\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + \beta_{12}\sigma_{12,t-1} \quad (۷۸-۴)$$

که مطابق مدل تلاطم بر اساس روش $GARCH\,(1,1)$ است.

هم‌چنین می‌توانیم کوواریانس‌ها و همبستگی‌ها را از طریق دیگر مدل‌های خانوادهٔ $GARCH$ به‌طریق مشابهی به‌دست آوریم. مثلاً، اگر از مدل $FGARCH$ استفاده کنیم، کوواریانس بازدهٔ دو دارایی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma_{12t} = \beta_1\beta_2\sigma_{I_t}^2 + \varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t} \quad (۷۹-۴)$$

رابطهٔ فوق را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد که شکل عمومی آن است:

$$\sigma_{(i,j)t} = \beta_i \beta_j \sigma_{I_t}^2 + \varepsilon_{i,t}\varepsilon_{j,t} \quad (۸۰-۴)$$

سپس از مدل $FGARCH$ برای تخمین کوواریانس استفاده می‌کنیم. نحوهٔ محاسبهٔ کوواریانس در این روش دقیقاً مشابه همان روشی است که در برآورد تلاطم از آن استفاده می‌کنیم.

کوواریانس‌ها و همبستگی‌های ضمنی

کوواریانس‌ها و همبستگی‌ها را نیز می‌توان با استخراج کووریانس‌ها و همبستگی‌های ضمنی به‌طریقی مشابه با تلاطم‌های ضمنی، برآورد کرد. برای درک چگونگی انجام این‌کار، ابتدا در نظر داشته باشید که واریانس اختلاف دو متغیر ۱ و ۲ عبارت است از:

$$\sigma_{1-2}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \quad (۸۱-۴)$$

ρ_{12} در رابطهٔ فوق، ضریب همبستگی بین دو متغیر است. معادلهٔ فوق را به‌گونه‌ای مرتب می‌کنیم که ضریب همبستگی در سمت چپ قرار گیرد:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1-2}^2}{2\sigma_1\sigma_2} \quad (۸۲-۴)$$

این رابطه به ما می‌گوید که چگونه می‌توانیم از طریق تخمین سه تلاطم σ_1^2، σ_2^2 و σ_{1-2}، تخمینی از همبستگی دو متغیر به‌دست آوریم. به‌هرحال تنها زمانی می‌توانیم این همبستگی‌های ضمنی را محاسبه کنیم که اختیارمعامله‌های مربوطه، در دسترس باشد. ما به اختیارمعاملهٔ دارایی ۱ و ۲ و از همه مهم‌تر به اختیارمعامله‌ای روی اختلاف بین ۱ و ۲ (مثلاً، اختیارمعاملهٔ دامنک[1] یا اختلاف قیمت[2]) نیازمندیم. بدیهی است که اختیارمعاملهٔ دامنک نسبتاً کمیاب است، بنابراین به‌ندرت فرصت محاسبهٔ همبستگی‌های ضمنی فراهم می‌شود. با این‌حال حتی اگر قادر به استخراج آن‌ها شدیم، باید با احتیاط مورد استفاده قرار

---

1. spread option
2. diff option

گیرد، چراکه دارای محدودیت‌های مربوط به برآوردهای تلاطم ضمنی است و درعین حال ممکن است بسیار بی‌ثبات باشد.

برخی دام‌های مربوط به برآورد همبستگی

به‌هنگام برآورد همبستگی‌ها، باید به چند نکتهٔ اساسی توجه کرد:

- تخمین‌های همبستگی اغلب بسیار بی‌ثبات است، بنابراین حرفه‌ای‌ها باید در تعبیر همبستگی‌های تخمینی و اتکا بر آن‌ها دقت زیادی به‌خرج دهند.
- دقیقاً به‌خاطر همین بی‌ثباتی است که اغلب تعداد قابل‌ملاحظه‌ای از مشاهدات جهت شناسایی تغییرات اساسی در همبستگی‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین، تغییرات در همبستگی‌ها اغلب به‌قدری دیر شناسایی می‌شود که کاری نمی‌توان کرد.
- اغلب در شرایط عادی بازار، همبستگی‌ها نسبتاً باثباتند و در شرایط بحرانی مقادیر بسیار بالا یا بسیار پایین به‌خود می‌گیرند. به‌عبارت دیگر دقیقاً زمانی که به همبستگی‌ها نیاز است، این امکان وجود دارد که فاقد اعتبار باشند.
- یک نکتهٔ حیاتی نیز در مورد روش‌شناسی همبستگی وجود دارد: باید قبل از اقدام به برآورد همبستگی یا تلاطم، وجود شرایط لازم برای استفاده از آن را را کنترل کرد. اگر در انجام این کار کوتاهی شود، خطر بی‌معنی‌بودن برآوردها وجود دارد. زیرا، ممکن است که پارامترهای تخمینی در واقعیت وجود نداشته باشد. تنها این‌که می‌توانیم چیزی را تخمین بزنیم، دالّ بر وجود آن نیست.

پیش‌بینی ماتریس‌های کوواریانس

به‌نظر می‌رسد با تخمین واریانس‌ها و کوورایانس‌ها به‌راحتی می‌توان ماتریس واریانس–کوواریانس را جهت برآورد واریانس سبد دارایی تشکیل داد. اما، در عمل ممکن است با مسائلی مواجه شویم که به پیچیدگی بیشتر فرآیند تخمین می‌انجامد. به‌عنوان مثال، ماتریس واریانس–کوواریانس تخمینی باید به‌طور معیّن یا نیمه‌معین، مثبت باشد.

ماتریس معیّن مثبت[1] و ماتریس نیمه‌معیّن مثبت[2]

1. positive-definite matrix
2. positive semi-definite matrix

در این بخش به پیش‌بینی ماتریس‌های کوواریانس و همبستگی می‌پردازیم. پیش‌بینی این ماتریس‌ها مشکل‌تر از برآورد تلاطم‌های انفرادی و کووراریانس‌ها یا همبستگی‌هاست، چراکه ما به‌دنبال ماتریس کوواریانسی هستیم که بدون توجه به اندازهٔ نسبی هر موقعیت همیشه واریانس سبد دارایی را مثبت و یا در صورت امکان غیرمنفی به‌دست آورد. قید مثبت‌بودن واریانس سبد دارایی مستلزم این است که ماتریس کوواریانس یعنی Σ، همیشه مثبت[۱] باشد. این بدان معنی است که:

$$\mathbf{w}\,\Sigma\,\mathbf{w}^{\mathbf{T}} > \mathbf{0} \qquad (۸۳-۴)$$

که $\mathbf{w}$ بردار سطری وزن موجودی‌ها با ابعاد $1\times m$ و $\mathbf{w}^{\mathbf{T}}$ نیز ترانهادهٔ[۲] آن است. این رابطه مشروط بر غیرصفربودن بردار وزن ($\mathbf{w}\neq 0$)، همیشه باید صادق باشد.

قید غیرمنفی‌بودن مستلزم شرایطی است که اندکی ضعیف‌تر از قید قبلی است. در این‌جا ماتریس کوواریانس یعنی Σ، باید به‌طور نیمه‌معین مثبت[۳] باشد. یعنی:

$$\mathbf{w}\,\Sigma\,\mathbf{w}^{\mathbf{T}} \geq \mathbf{0} \qquad (۸۴-۴)$$

ما می‌توانیم هرکدام از این قیود را برای محاسبهٔ ماتریس کوواریانس در نظر بگیریم، اما قید مثبت‌بودن معین، محدودکننده‌تر است ولی گاهی اوقات کارکردن با آن ساده‌تر است. بنابراین، نیاز به رویکردهای منظمی داریم که تمامی پارامترهای ماتریس واریانس–کوواریانس را به‌گونه‌ای برآورد کند که ماتریس واریانس–کوواریانس تخمینی، معین مثبت یا به‌طور نیمه‌معین مثبت باشد. این مسأله ما را به‌سوی سه روش زیر رهنمون می‌گردد.

- تخمین واریانس–کوواریانس تاریخی
- $EWMA$ چندمتغیره[۴]
- $GARCH$ چندمتغیره[۵]

1. positive definite
2. transpose
3. positive semi-definite
4. multivariate EWMA
5. multivariate GARCH

برآورد واریانس-کوواریانس تاریخی

این رویکرد ساده‌ترین روش برای تخمین ماتریس‌های واریانس-کوواریانس است. در این رویکرد ابتدا اندازهٔ پنجره، یعنی k را تعیین می‌کنیم و سپس به برآورد تلاطم‌ها و کوواریانس‌ها می‌پردازیم. این رویکرد همانند برآورد تاریخی تلاطم‌ها و کوواریانس‌های انفرادی دارای مشکلاتی است و تنها زمانی مناسب است که ماتریس واریانس-کوواریانس واقعی در طی زمان ثابت باشد و این شرط هرگز در عمل برآورده نمی‌شود. این رویکرد هم‌چنین متحمل اثرات شبح است. اثرات شبح، اصطلاحی است که به تأثیرگذاری بازده‌های کوچک و یا زیان‌های بزرگ در برآوردهای واریانس یا کوواریانس اطلاق می‌گردد. بدین معنی که یک بازدهٔ کوچک و یا زیان بزرگ تا خروج از پنجرهٔ غلتان، برآوردهای ما از تلاطم‌های دارایی را متأثر می‌سازد.

میانگین متحرک با اوزان نمایی چندمتغیره

ما می‌توانیم از نواقص رویکرد فوق با استفاده از رویکرد $EWMA$ چندمتغیره برای تخمین ماتریس واریانس-کوواریانس اجتناب کنیم. این رویکرد از انعطاف‌پذیری بیشتری برخوردار است و کمتر متحمل اثرات شبح می‌شود. به هر حال کاربرد این رویکرد مستلزم این است که برای هر واریانس و کوواریانس مقدار λ را به‌طور جداگانه تعیین کنیم و این ما را با وضعیت دشواری روبرو می‌سازد. ما به‌طور ایده‌آل به‌دنبال ضریب هموارسازی خاص هر واریانس و کوواریانس هستیم، به‌گونه‌ای که به بهترین برازش برای هرکدام از این تخمین‌ها حاصل شود. رویارویی با تعداد زیادی از مقادیر λ مشکل است و هیچ تضمینی وجود ندارد که ماتریس واریانس-کوواریانس حاصله، همیشه مثبت باشد. همین ملاحظات باعث شد که در ریسک‌متریک تنها یک مقدار λ برای برآورد ماتریس واریانس-کوواریانس بازده‌های روزانه در نظر گرفته شود که برابر ۰/۹۴ است.

خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس چندمتغیره

از آن‌جا که رویکردهای $GARCH$ عموماً بهتر از $EWMA$ می‌باشد، به‌لحاظ نظری جهت برآورد ماتریس واریانس-کوواریانس ارجحیت دارد. به هر حال مدل‌های $GARCH$ چندمتغیره به پارامترهای فراوانی نیاز دارد و الزام در برآورد این پارامترها، محدودکنندهٔ

توانمندی ما جهت ادارهٔ این رویکرد در اندازه‌های بزرگ است. هم‌چنین مدل‌های $GARCH$ چندمتغیره متحمل مسائل مربوط به همگرایی در برآورد[1] است و این امر دستیابی به تخمین‌های قابل‌اتکا از تمامی پارامترها را با مشکل مواجه می‌کند. یکی از نتایج چنین مسائلی این است که سیستم‌های $GARCH$ چندمتغیرهٔ محدودنشده[2] تنها زمانی موجه است که تعداد نسبتاً کمی از سری‌های مختلف بازده در اختیار داشته باشیم. بر اساس یک قاعدهٔ سرانگشتی می‌توان گفت که این تعداد نباید از ۱۰ تجاوز کند.

برای این‌که این مسائل را بهتر درک کنید یکی از مدل‌های استاندارد $GARCH$ چندمتغیره یعنی مدل $BEKK$ را در نظر بگیرید. این مدل به نام تصنیف‌کنندگانش یعنی بابا، انگل، کرَفت و کرونر[3] می‌باشد. این مدل برای $GARCH\ (1,1)$ چندمتغیره، دارای ماتریسی به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{\Sigma_t = CC^T + AE_{t-1}E_{t-1}^T A^T + B\Sigma_{t-1} B^T} \quad (۸۵-۴)$$

اگر n سری مختلف بازده داشته باشیم، $\mathbf{\Sigma_t}$ ماتریسی است که شامل $n(n+1)/2$ واریانس و کوواریانس شرطی مجزا در زمان t است. $\mathbf{E_t}$ ماتریس $n\times n$ خطاها و $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ماتریس‌هایی $n\times n$ می‌باشند که اعضای این ماتریس‌ها به‌ترتیب شامل پارامترهای α و β است. ماتریس پارامترهای $\boldsymbol{\omega}$ از حاصل‌ضرب دو ماتریس $\mathbf{C}$ و $\mathbf{C^T}$ ایجاد می‌شود. $\mathbf{C}$ ماتریسی $n\times n$ و پایین مثلثی است. این مدل هیچ محدودیتی میان معادلات برقرار نمی‌کند و ویژگی مثبت‌بودن همیشگی ماتریس واریانس-کوواریانس را تضمین می‌نماید. مشکل این مدل پارامترهای زیاد آن است. تعداد پارامترهای این مدل با رابطهٔ زیر قابل‌محاسبه است:

$$\frac{n(5n+1)}{2} \qquad (۸۶-۴)$$

به‌عنوان مثال، اگر تنها دو سری بازده داشته باشیم، مدل $BEKK$ شامل ۱۱ پارامتر مختلف خواهد بود. برای دو سری بازده بر اساس رابطهٔ (۴-۸۵) خواهیم داشت:

---

1. convergence-in-estimation
2. unrestricted multivariate GARCH systems
3. Baba, Engle, Kraft and Kroner

$$\sum_t = \begin{pmatrix} \sigma_{11,t} & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{22,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}\varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11,t-1} & \sigma_{12,t-1} \\ \sigma_{21,t-1} & \sigma_{22,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix} \quad (۸۷-۴)$$

تعداد پارامترها با بزرگ‌ترشدن n با سرعت بیشتری افزایش می‌یابد. بنابراین این مدل برای مسائلی با ابعاد بزرگ، مستلزم برآورد پارامترهای بسیار زیادی است. البته، می‌توانیم با برقراری محدودیت‌هایی بر روی پارامترها، تعداد آن‌ها را کاهش دهیم، اما این محدودیت‌ها خود ممکن است باعث ایجاد مسائلی جدید شود.

راه‌حل‌های مختلفی برای چنین مسائلی پیشنهاد شده است. یک راه‌حل ساده استفاده از $GARCH$ برای پیش‌بینی تلاطم‌ها و ثابت فرض‌کردن همبستگی‌هاست. راه‌حل پیشرفته‌تر بعدی کاربرد اجزای اصلی[1] برای عوامل ریسک و سپس اجرای تحلیل $GARCH$ بر روی این اجزای اصلی است. به‌عنوان مثال مدل $GARCH$ متعامد[2] از نمونهٔ این رویکردهاست که برای اولین بار توسط الکساندر و چیبومبا پیشنهاد شد.[3] برای اجرای این رویکرد ما عوامل ریسک را به گروه‌های حاوی طبقات شدیداً همبسته ریسک تقسیم می‌کنیم و از تحلیل اجزای اصلی جهت متعامدساختن[4] هرکدام از سیستم‌های فرعی عوامل ریسک استفاده می‌کنیم. سپس $GARCH$ یک متغیره[5] را برای هرکدام از اجزای اصلی طبقات ریسک به‌کار می‌گیریم و نتایج را جهت ایجاد ماتریس واریانس–کوواریانس بزرگی که در واقع به‌دنبال آن هستیم، به هم متصل می‌کنیم. از این روش می‌توان برای مسائلی با ابعاد بزرگ استفاده نمود.

---

1. principal components
2. orthogonal GARCH model
3. Alexander and Chibumba (1997).
4. orthogonalise
5. univariate GARCH

اکنون که با مدل‌های پیش‌بینی بازده و تلاطم بازده آشنا شدیم به معرفی رویکردهای مدل‌سازی ریسک می‌پردازیم.

رویکردهای مدل‌سازی ریسک

در حالی‌که ریسک مفهومی قابل‌درک است، اندازه‌گیری آن مسأله‌ای چالش‌برانگیز می‌باشد. رویکردهای موجود برای کمّی‌سازی ریسک، متدولوژی‌های مختلفی را به‌کار می‌گیرند، با این‌حال همگی از فرآیند مشترکی که در فصل دوم تشریح نمودیم تبعیت می‌کنند.

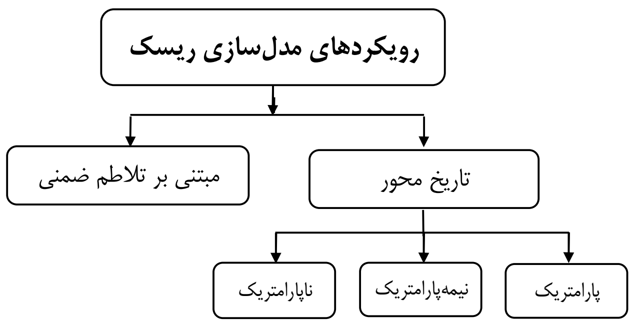
برای مدل‌سازی ریسک ابتدا باید به سؤال مهمی پاسخ دهیم. آیا می‌خواهیم از مدل‌های پارامتریک استفاده کنیم و بر اساس مبانی آن‌ها به اندازه‌گیری ریسک بپردازیم و یا در نظر داریم که از مدل‌های ناپارامتریک نیز استفاده کنیم؟ آیا در صورت امکان تمایل به استفاده از مدل‌های ترکیبی و به‌اصطلاح نیمه‌پارامتریک داریم؟ پاسخ به این سؤالات رویکرد ما را در مدل‌سازی ریسک مشخص می‌نماید. ما رویکردهای مدل‌سازی ریسک را در سه گروه دسته‌بندی می‌کنیم:

- رویکردهای پارامتریک[1]
- رویکردهای ناپارامتریک[2]
- رویکردهای نیمه‌پارامتریک[3]

هرکدام از رویکردهای پارامتریک، ناپارامتریک و نیمه‌پارامتریک شامل مدل‌های متنوعی است. نتایج این مدل‌ها ممکن است با یکدیگر بسیار متفاوت باشد، بنابراین برای تصمیم‌گیری در مورد انتخاب مدل، درک مفروضات و نیز مدل‌های ریاضی و فنون کمّی مورد استفاده، ضروری است. تنها پس از طی این گام‌های مقدماتی، محقق می‌تواند در مورد مدلی که به اهدافش نزدیک‌تر است، تصمیم بگیرد.

1. parametric approaches
2. nonparametric approaches
3. semiparametric approaches

در نمودار (۴-۱۴) یک گروه‌بندی از رویکردهای مدل‌سازی ریسک ارایه شده است. رویکردهای سمت راست این نمودار جزء گروه رویکردهای تاریخ محور[1] است. ویژگی مشترک تمامی روش‌های موجود در این گروه، استفادهٔ آن‌ها از داده‌های تاریخی به‌منظور تعیین شکل توزیع احتمال است. در مقابل، رویکردهای مبتنی بر تلاطم ضمنی[2] وجود دارد. این رویکرد از مدل‌های قیمت‌گذاری اوراق مشتقه و قیمت‌های جاری این اوراق بدون توسل به داده‌های تاریخی بهره می‌گیرد. استفاده از تلاطم ضمنی حاصل از مدل قیمت‌گذاری اختیارمعاملهٔ بلک-شولز رایج‌ترین مدل موجود در این رویکرد است.



نمودار (۴-۱۴): رویکردهای مدل‌سازی ریسک

رویکردهای ارزش درمعرض‌ریسک، شکلی ساده‌تر از فرآیند آن است. روش‌ها و مدل‌های فراوانی در هرکدام از این رویکردها وجود دارد و برای این‌که بتوانیم به‌طور رضایت‌بخشی به معرفی آن‌ها بپردازیم، مجبوریم بازهم مسأله را ساده‌تر کنیم. ما در بیشتر اوقات به‌سادگی فرض را بر این می‌گیریم که عوامل ریسک سبد دارایی، قیمت‌های اوراق بهادار است. به‌عبارتی دیگر بردار عوامل کلیدی تنها شامل قیمت‌های آتی اوراق بهادار می‌باشد و این بدان معناست که در بررسی‌های ما بردار دارایی همان بردار کلیدی است. توجه به این نکته ما را در جهت برقراری ارتباط میان فرآیند محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک و رویکردهای آن یاری می‌دهد.

---

1. historical based approaches
2. implied volatility based approaches

در فصل‌های بعدی به‌ترتیب به تشریح رویکردهای پارامتریک، ناپارامتریک و نیمه‌پارامتریک در قالب ارزش درمعرض‌ریسک می‌پردازیم.

نتیجه‌گیری

پویایی‌ها و همبستگی‌های زمانی بازده و خصوصاً تلاطم‌های بازده ما را در جهت توسعهٔ مدل‌هایی جهت احتساب این پویایی‌ها و همبستگی‌ها، سوق می‌دهد. بر این اساس، استفاده از مدل‌های غیرشرطی برای سری بازدهٔ مالی خصوصاً در کوتاه‌مدت قابلیت توجیه ندارد. بنابراین به‌ناچار باید مدل‌های شرطی را مورد توجه قرار دهیم. در این مدل‌ها، بازده و تلاطم هر دوره با توجه به آخرین اخبار رسیده پیش‌بینی می‌شود. با توسعهٔ مدل‌های پیش‌بینی بازده و مدل‌های پیش‌بینی تلاطم، فرآیند مدل‌سازی ریسک کامل می‌شود و امکان ترسیم توزیع احتمال بازدهٔ دارایی و استخراج سنجه‌های ریسک موردنظر فراهم می‌آید.

منابع

1. Alexander, C. and Chibumba, A. (1997), "Orthogonal GARCH: an empirical validation in equities, foreign exchange and interest rates," Mimeo. *University of Sussex*.
2. Bollerslev, T. (1986), "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, Vol. 31, pp. 307-328.
3. Chatfield, C. (2001), *Time Series Forecasting*, Chapman & Hall / CRC, 181-214.
4. Dowd, K. (2005), *Measuring Market Risk*, John Wiley & Sons Ltd, Second Edition.
5. Engle, R. F. (1982), "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation," *Econometrica*, Vol. 50, pp. 987-1008.
6. Engle, R. F. (2001), "The use of ARCH/GARCH model in applied econometrics," *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 15, No. 4, pp. 157-168.
7. Engle, R. F. and Ng, V. K. (1993), "Measuring and testing the impact of news on volatility," *Journal of Finance*, Vol. 48, No. 5, pp. 1749-1778.
8. Glosten, L. R., Jagnnathan, R. and Runkle, D. E. (1993), "On the relation between the expected value and the volatility of the normal excess return on stocks," *Journal of Finance*, Vol. 48, No. 5, pp. 1779-1801.
9. Harris, R. D. F., Stoja, E. and Tucker, J. (2007)," A simplified approach to modeling the co-movement of asset returns," *Journal of Future Markets*, Vol. 27, No. 6. pp. 575-598.
10. Holton, G. H. (2004), *Value-at-risk: Theory and Practice*, Academic Press.

11. Moosa, I. A., Bollen, B. (2002), "A benchmark for measuring bias in estimated daily value at risk," *International Review of Financial Analysis*, Vol. 11, No, 1, pp. 85-100.

12. Nelson, D.B., (1991), "Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach," *Econometrica*, Vol. 59, pp. 347-370.

13. Nylund, S. (2001), *Value at Risk Analysis for Heavy-Tailed Financial Returns*, Helsinki University of Technology, Department of Engineering Physics and Mathematics.

14. Palendri, A. (2004), *Multivariate GARCH Models: Inference and Evaluation*. Department of Economics, Duke University.

15. RiskMetrics™ (1996), *RiskMetrics Technical Document*, J. P. Morgan, 4th Edition.

16. Sharpe, W. F. (1963), "A simplified model for portfolio analysis**,"** *Management Science*, Vol. 9, pp. 277-293.

17. Tse, Y. K. and Tsui, A. K. C. (2000), "A multivariate GARCH model with time-varying correlations," *Journal of Business and Economics***,** Vol. 20, pp. 351-362.

18. Zakoian, J.-M. (1990), "Threshold heteroskedastic models," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 18. No. 5, pp. 931-955.

فصل پنجم

رویکردهای پارامتریک

مقدمه

در میان رویکردهای مختلف مدل‌سازی و اندازه‌گیری ریسک، رویکردهای پارامتریک از بیشترین توجه برخوردارند. جذابیت‌های آمار پارامتریک ازجمله سهولت تعمیم‌پذیری و وجود ابزارهای قدرت‌مند کمّی‌سازی باعث شده که رویکردهای پارامتریک حاوی مدل‌های متنوعی در عرصهٔ ریسک باشد. در فصل قبل به مدل‌سازی ریسک پرداختیم و مفاهیم و ابزارهای مورد نیاز را تشریح نمودیم. در این فصل و فصل بعدی رویکردهای پارامتریک اندازه‌گیری ریسک را در قالب ارزش درمعرض‌ریسک و ریزش موردانتظار بررسی کرده و مزایا و معایب هرکدام را برمی‌شمریم.

مشخصه‌ها و مفروضات

مهم‌ترین مشخصهٔ رویکردهای پارامتریک این است که فرض خاصی را در مورد توزیع احتمال بازدهٔ دارایی در نظر می‌گیرد و تمامی محاسبات بر اساس فرض توزیعی بنا می‌گردد. این توزیع می‌تواند توزیع نرمال، t ، توزیع خطای تعمیم‌یافته و یا هر توزیع آماری دیگر باشد. این رویکردها مفروضات خاصی را برای ساده‌سازی فرآیند محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک به‌کار می‌گیرند.

مفروضات رویکردهای پارامتریک به این شرح است:

- بازدهٔ سرمایه‌گذاری و عوامل ریسک از توزیع خاصی پیروی می‌کند.
- معمولاً بازدهٔ سرمایه‌گذاری به لحاظ زمانی مستقل فرض می‌گردد.
- عموماً رابطهٔ بین عوامل ریسک بازار و ارزش دارایی خطی در نظر گرفته می‌شود.

این مفروضات تا حد زیادی مسائل موجود در فرآیند محاسبهٔ VaR را تسهیل می‌کند. فرض اول توزیع خاصی به عوامل ریسک و بازدهٔ دارایی‌ها نسبت می‌دهد. این فرض از اظهار نظر در مورد توزیع عوامل ریسک جلوگیری می‌کند. به‌عبارتی دیگر، قسمت عمده‌ای از سختی فرآیند استنباط از بین می‌رود و تنها برآورد پارامترهای توزیع منتخب باقی می‌ماند. بدین ترتیب، ما دیگر به‌دنبال توزیع برازندهٔ عوامل ریسک نیستیم و تنها باید مشخصات یک توزیع فرضی را بر اساس داده‌ها تخمین بزنیم. فرض دوم استفاده از قاعدهٔ جذر زمان را مقدور می‌سازد و فرض سوم باعث سادگی نگاشت سبد دارایی و به‌دنبال آن سادگی فرآیند انتقال می‌شود.

فرض اساسی رویکردهای پارامتریک همان فرض اول است. مفروضات بعدی عموماً جهت ساده‌سازی در نظر گرفته می‌شود ولی جزء مفروضات اصلی این رویکردها نیست. با نقض هرکدام از این مفروضات بر پیچیدگی رویکردهای پارامتریک افزوده می‌شود. در این فصل ما هیچ اصراری بر حفظ دو فرض آخر نداریم و تنها آن‌ها را برای آگاهی خوانندگان از برخی مفروضاتی ارایه نموده‌ایم که جهت ساده‌سازی بر رویکردهای VaR تحمیل شده است.

مدل‌های پارامتریک

همان‌گونه که قبلاً اشاره کردیم، ارزش درمعرض‌ریسک مفهومی است که مدل‌های متعددی جهت انعکاس آن توسعه یافته است. در این میان، مدل‌های پارامتریک از تداول و تنوع بیشتری برخوردارند. در ادامه، مدل‌های پارامتریک را در قالب دو گروه مدل‌های متداول و مدل‌های متنوع مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مدل‌های متداول پارامتریک

در میان مدل‌های پارامتریک، برخی بسیار متداول بوده و به‌طور گسترده مورد استفادهٔ فعالان ریسک می‌باشد. ما این مدل‌ها را تحت عنوان مدل‌های متداول بررسی می‌کنیم که شامل ارزش درمعرض‌ریسک نرمال، t، لاگ‌نرمال و مدل‌های تلاطم تصادفی است.

ارزش درمعرض‌ریسک و ریزش موردانتظار نرمال

با توجه به قضیهٔ حد مرکزی، در نظرگرفتن فرض نرمال برای توزیع بازدهٔ دارایی‌ها بسیار رایج و معقول است. این توزیع هم‌چنین از این جهت مورد توجه است که تنها از طریق دو پارامتر تشریح می‌شود. در نهایت، محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک با فرض نرمال‌بودن توزیع بازده، فرمولی ساده و قابل‌درک دارد. با فرض نرمال‌بودن توزیع بازده، ارزش درمعرض‌ریسک به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$VaR_t = -P_{t-1} \times (\mu_t - \sigma_t z_\alpha) \quad (۱-۵)$$

که VaR_t، ارزش درمعرض‌ریسک دورهٔ t، P_{t-1}، قیمت سهم در دورهٔ $t\text{-}1$، μ_t میانگین بازده در دورهٔ t، σ_t انحراف‌معیار بازده در دورهٔ t و z_α مقدار متغیر نرمال‌استاندارد در سطح اطمینان $1-\alpha$ است. بدیهی است که عبارت داخل پرانتز، $\%VaR$ با علامت منفی می‌باشد که حاصل‌ضرب آن در منفی قیمت جاری سهم، معادل VaR است.

برای محاسبهٔ ریزش موردانتظار از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$ES_t = -P_{t-1}\left(\mu_t - \sigma_t \frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha}\right) \quad (۲-۵)$$

در این رابطه، ES_t ریزش موردانتظار دورهٔ t است و $\phi(z_\alpha)$ مقدار تابع چگالی احتمال توزیع نرمال‌استاندارد به ازای مقدار z_α است. در این‌جا هم عبارت داخل پرانتز، $\%ES$ با علامت منفی می‌باشد که حاصل‌ضرب آن در قیمت جاری دارایی با علامت منفی، معادل ES است.

مثال (۵-۱): VaR و ES نرمال

فرض کنید بازدهٔ یک دارایی با قیمت جاری ۱۰۰ تومان، دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف‌معیار ۰/۱ است. در سطح اطمینان ۹۵ درصد، VaR و ES برابر است با:

$$VaR = -100 \times (0 - 1.645 \times 0.1) = 16.45$$
$$ES = -100\left(0 - 0.1\frac{0.1031}{0.05}\right) = 20.62$$

مقدار VaR بدین معناست که در سطح اطمینان ۹۵٪، کاهش ارزش دارایی بیشتر از ۱۶/۴۵ تومان نخواهد شد. و مقدار ES گویای این است که متوسط ۵٪ از بدترین زیان‌های دارایی ۲۰/۶۲ تومان خواهد بود.

یکی از ویژگی‌های مطلوب رویکردهای پارامتریک، امکان تخمین ارزش درمعرض‌ریسک در هر سطح اطمینان و هر دورهٔ نگهداری است. در مورد توزیع نرمال، سطح اطمینان موردنظر در مقدار z_α منعکس می‌شود و دورهٔ نگهداری در μ_t و σ_t ظاهر می‌گردد. اگر μ_t و σ_t به‌ترتیب میانگین و انحراف‌معیار بازده طی یک دورهٔ زمانی خاص (مثلاً، دورهٔ یک‌روزه) باشد، میانگین و انحراف‌معیار بازده برای تعداد h دوره از این دورهٔ خاص، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\mu(h) = h\mu \qquad (۵-۳)$$
$$\sigma^2(h) = h\sigma^2 \Rightarrow \sigma(h) = \sqrt{h}\,\sigma \qquad (۵-۴)$$

هم‌اکنون این روابط را در معادلهٔ VaR و ES جایگزین می‌کنیم تا به فرمول VaR و ES طی h دورهٔ زمانی و سطح اطمینان $1-\alpha$ برسیم:

$$VaR_{ht} = -P_{t-1}(h\mu_t - \sqrt{h}\sigma_t\, z_\alpha) \qquad (۵-۵)$$
$$ES_{ht} = -P_{t-1}\left(h\mu_t - \sqrt{h}\sigma_t \frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha}\right) \qquad (۵-۶)$$

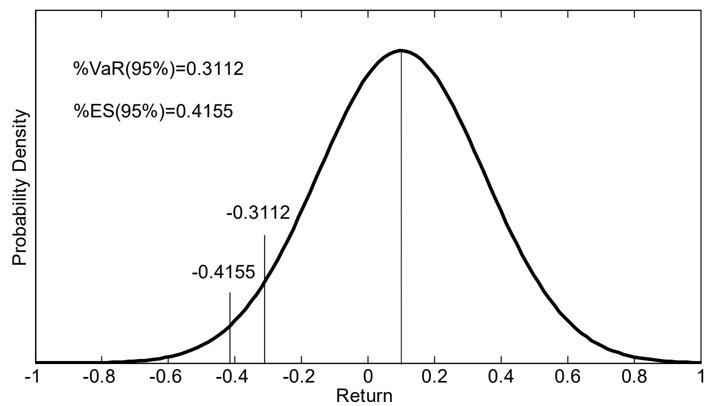
توجه داشته باشید استفاده از روابط فوق در صورت پذیرش فرض استقلال زمانی بازده‌ها توجیه‌پذیر است. در غیر این‌صورت مجاز به استفاده از این روابط نیستیم.

مثال (۵-۲): VaR و ES تک‌دوره‌ای و چنددوره‌ای

فرض کنید توزیع بازدهٔ یک دارایی، نرمال با میانگین ۰/۱ و انحراف‌معیار روزانه ۰/۲۵ است و قیمت جاری دارایی ۱۰۰ هزار تومان است. بدین ترتیب، بر اساس روابط (۵-۱) و (۵-۲) ارزش درمعرض‌ریسک و ریزش موردانتظار روزانه در سطح اطمینان ۹۵٪ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$VaR = -100 \times (0.1 - 0.25 \times 1.645) = 31.12$$
$$ES = -100\left(0.1 - 0.25\frac{0.1031}{0.05}\right) = 41.55$$

در نمودار زیر، این ارزش درمعرض‌ریسک و ریزش موردانتظار ارایه شده است.



نمودار (۵-۱): ارزش درمعرض‌ریسک و ریزش موردانتظار برای توزیع بازدهٔ نرمال

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید از توزیع بازدهٔ دارایی برای نمایش استفاده کرده‌ایم. بنابراین صدک‌های مشخص‌شده، $VaR\%$ و $ES\%$ می‌باشند.

با استفاده از روابط (۵-۵) و (۵-۶)، VaR و ES طی یک دورهٔ زمانی ۵ روزه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$VaR_{5t} = -100 \times (0.1 \times 5 - 0.25 \times \sqrt{5} \times 1.645) = 41.96$$
$$ES_{5t} = -100\left(5 \times 0.1 - \sqrt{5} \times 0.25\frac{0.1031}{0.05}\right) = 65.28$$

و برای یک دورهٔ ۱۰ روزه خواهیم داشت:

$$VaR_{10t} = -100 \times (10 \times 0.1 - \sqrt{10} \times 0.25 \times 1.645) = 30.05$$

$$ES_{10t} = -100\left(10 \times 0.1 - \sqrt{10} \times 0.25 \frac{0.1031}{0.05}\right) = 63.01$$

معایب فرض نرمال

به‌هنگام استفاده از ارزش درمعرض‌ریسک نرمال، باید معایب فرض توزیع نرمال را در خاطر داشته باشیم. یکی از معایب چنین فرضی این است که هیچ محدودیتی برای مقدار بازدهٔ بحرانی وجود ندارد و بازدهٔ بحرانی می‌تواند هر مقدار کوچکی را به‌خود بگیرد و این درحالی است که معمولاً بازده‌های کوچک دارای مرز است. مثلاً، بازده نمی‌تواند بیش از ۱۰۰٪- شود. نارسایی توزیع نرمال در محدودکردن حداقل بازده، ممکن است به ارزش درمعرض‌ریسک منفی بیانجامد و این بدان معناست که VaR بیش از ارزش دارایی است. به‌علاوه این نارسایی می‌تواند به تخمین دست‌بالا[1] از حداکثر زیان منجر شود.

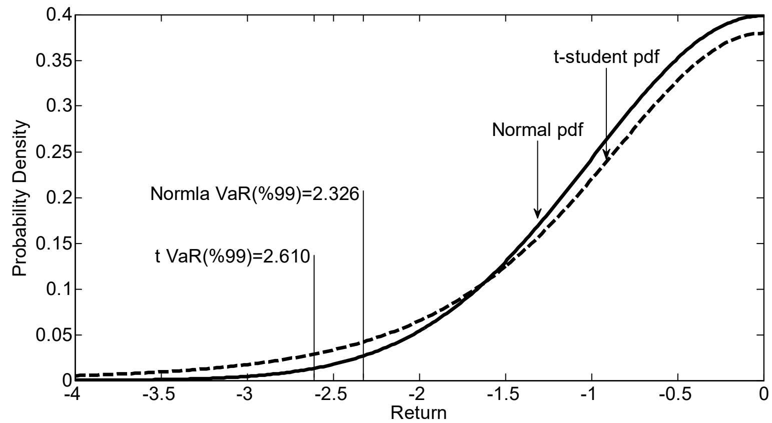
مسأله بعدی به منطق آماری آن بازمی‌گردد. فرض نرمال با اتکا به قضیهٔ حد مرکزی توجیه می‌شود و این قضیه بیشتر در مورد صدک‌ها و احتمالاتی کاربرد دارد که در مرکز ثقل تابع چگالی قرار دارد. برازش این توزیع برای صدک‌های موجود در دنباله در هاله‌ای از ابهام قرار دارد. وقتی با ارزش‌های فرین سروکار داریم، باید به نظریهٔ ارزش فرین (فصل ششم) مراجعه نماییم. طبق این نظریه برای مدل‌سازی ارزش‌های فرین نباید از توزیع نرمال استفاده کرد.

مسألهٔ دیگر این‌که بیشتر بازده‌های مالی دارای کشیدگی فراتر از نرمال و یا به عبارتی دنباله‌های ضخیم‌تری نسبت به توزیع نرمال است و نارسایی در احتساب این کشیدگی اضافی[2] ممکن است به تخمین دست‌پایین[3] از VaR یا ES منجر شود. اثرات کشیدگی در نمودار صفحهٔ بعد ارایه شده است. این نمودار تابع چگالی احتمال نرمال‌استاندارد و یک نوع

---

1. overestimation
2. excess kurtosis
3. underestimation

خاص از تابع چگالی احتمال با دنبالهٔ متراکم[1] را نشان می‌دهد. چگالی احتمـال اخیـر، تـابع چگالی t با میانگین صفر و انحراف‌معیار واحد و درجهٔ آزادی ۵ است.



نمودار (۵-۲): مقایسهٔ ارزش درمعرض‌ریسک نرمال و t

در این نمودار تأثیر کشیدگی اضافی توزیع t را به‌خوبی می‌توان مشاهده کرد. کشیدگی اضافی به این معنی است که دنباله‌ها نسبت به توزیع نرمال متراکم‌ترند و این معادل VaR یا ES بزرگ‌تر می‌باشد. مثلاً، در سطح اطمینان ۹۹ درصد، ارزش درمعرض‌ریسک نرمـال، ۲/۳۲۶ و ارزش درمعرض‌ریسک t معادل ۲/۶۱۰ می‌باشد که ۱۲٪ بزرگ‌تر است. هم‌چنـین از روی نمودار مشخص است که با افزایش سطح اطمینان، این اختلاف بیشتر می‌شود.

ارزش درمعرض‌ریسک t [2]

یک راه برای نشان‌دادن کشیدگی توزیع بازدهٔ یک دارایی استفاده از توزیـع t بـه‌جای توزیع نرمال است. کشیدگی یک توزیع t با درجهٔ آزادی υ مشـروط بـر $\upsilon \geq 5$، از رابطـهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{3(\upsilon-2)}{\upsilon-4} \qquad (۵-۷)$$

1. thick tail
2. t VaR

بنابراین، با انتخاب درجهٔ آزادی مناسب می‌توانیم حداکثر تا ۹ واحد کشیدگی را برای مشاهدات در نظر بگیریم. اگر به‌دنبال کشیدگی بالایی هستیم می‌توانیم مقدار نسبتاً کوچکی را برای υ انتخاب کنیم و اگر به‌دنبال کشیدگی نسبتاً پایینی هستیم می‌توانیم مقدار بالایی را برای آن در نظر بگیریم. برای اهداف اندازه‌گیری ریسک، می‌توانیم با توزیع تعمیم‌یافتهٔ t[1] کار کنیم که به ما امکان تعیین میانگین و انحراف‌معیار و نیز درجهٔ آزادی توزیع بازده را می‌دهد. براین اساس ارزش درمعرض‌ریسک از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$VaR_{ht} = -P_{t-1}\left(h\mu_t - \sqrt{h}\sqrt{\frac{\upsilon-2}{\upsilon}}\sigma_t\, t_{\alpha,\upsilon} \right) \quad (۸-۵)$$

که $t_{\alpha,\upsilon}$ مقدار معکوس تابع توزیع تجمعی t با درجهٔ آزادی υ و در سطح خطای α است. این رابطه با رابطهٔ ارزش درمعرض‌ریسک نرمال متفاوت است. در این‌جا عبارت مربوط به سطح اطمینان یعنی $t_{\alpha,\upsilon}$، به‌جای توزیع نرمال به توزیع t اشاره دارد و بنابراین علاوه بر سطح خطا (α)، به υ نیز بستگی دارد. همچنین رابطهٔ اخیر شامل ضریب $\sqrt{\upsilon-2/\upsilon}$ است.

از آن‌جا که با بزرگ‌شدن υ، توزیع t به توزیع نرمال نزدیک می‌شود، می‌توانیم توزیع t را به‌عنوان تعمیمی از توزیع نرمال با امکان ایجاد کشیدگی بیشتر از نرمال در نظر بگیریم. با بزرگ‌شدن υ، مقدار $t_{\alpha,\upsilon}$ به معادل نرمال خود یعنی z_α و مقدار $\sqrt{\upsilon-2/\upsilon}$ به یک نزدیک می‌شود و در نتیجه ارزش درمعرض‌ریسک t در رابطهٔ (۵-۸) به ارزش درمعرض‌ریسک نرمال در رابطهٔ (۵-۵) نزدیک می‌شود.

بزرگ‌ترین مزیت توزیع t نسبت به نرمال، توانایی آن در ایجاد مقادیر معقولی از کشیدگی است. به‌هرحال توزیع t دارای مسائل مربوط به خود است. این توزیع نیز همانند توزیع نرمال از برقراری محدودیت بر روی حداکثر زیان‌های ممکن عاجز است و از این‌رو ممکن است به‌طرز گمراه‌کننده‌ای تخمین‌های بالایی از ریسک ارایه دهد. به‌هنگام استفاده از این توزیع در سطوح اطمینان بسیار بالا یا بسیار پایین، با مسأله دیگری مواجه می‌شویم. این توزیع نیز همانند توزیع نرمال با نظریهٔ ارزش فرین هم‌خوانی ندارد و بنابراین باید از

---

1. generalized t-distribution

کاربرد توزیع t برای سطوح اطمینان بسیار بالا یا بسیار پایین اجتناب کنیم. توزیع t همچنین دارای مشکل دیگری است که در توزیع نرمال به چشم نمی‌خورد. این توزیع از ثبات برخوردار نیست. یعنی مجموع دو یا چند متغیر تصادفی که دارای توزیع t باشد، ضرورتاً دارای توزیع t نیست. این مسأله، هنگام کارکردن با توزیع‌های چندمتغیرهٔ t، مشکل‌ساز می‌شود. به‌عنوان مثال، اگر بازدهٔ دارایی‌های انفرادی دارای توزیع t باشد، توزیع بازدهٔ سبد دارایی به‌راحتی مشخص نمی‌شود. برای غلبه بر این مشکل می‌توان از فنونی چون شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده کرد.

مثال(۵-۳): t-VaR

فرض کنید بازدهٔ یک دارایی دارای توزیع تعمیم‌یافتهٔ t با میانگین ۰/۱ و انحراف‌معیار ۰/۲۵ و درجهٔ آزادی ۵ است و قیمت جاری آن نیز ۱۰۰ تومان می‌باشد. برای دورهٔ آتی، ارزش درمعرض‌ریسک در سطح اطمینان ۹۹٪ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$VaR = -100\times\left(0.1-\sqrt{\frac{5-2}{5}}\times 0.25\times 3.365\right) = 55.16$$

ارزش درمعرض‌ریسک نرمال بر اساس اطلاعات فوق ۴۸/۱۵ به‌دست می‌آید.

ارزش درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال

یک گزینهٔ معمول دیگر این است که فرض کنیم بازده‌های هندسی به‌صورت نرمال توزیع شده‌اند. این فرض معادل در نظرگرفتن توزیع لاگ‌نرمال برای ارزش سبد دارایی در پایان دورهٔ نگهداری است. ارزش درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$VaR_{ht} = P_{t-1}\left(1-(Exp(h\mu_t-\sqrt{h}\,\sigma_t\, z_\alpha)\right) \quad (۵-۹)$$

در این رابطه، μ_t میانگین بازده‌های هندسی و σ_t انحراف‌معیار آن است. z_α نیز مطابق معمول، مقدار متغیر نرمال‌استاندارد در سطح اطمینان $1-\alpha$ است. بدیهی است که عبارت داخل پرانتز $\%VaR$ است.

جذابیت فرض توزیع لاگ‌نرمال در این است که احتمال ایجاد ارزش منفی برای سبد دارایی را از بین می‌برد. بدین معنی که با در نظرگرفتن این فرض، ارزش درمعرض‌ریسک

هرگز نمی‌تواند از ارزش سبد فراتر رود. وقتی قیمت یک دارایی دارای توزیع لاگ‌نرمال باشد، به معنی یک فرآیند حرکت براونی هندسی[1] یا یک فرآیند گشت تصادفی لاگ‌نرمال[2] می‌باشد.

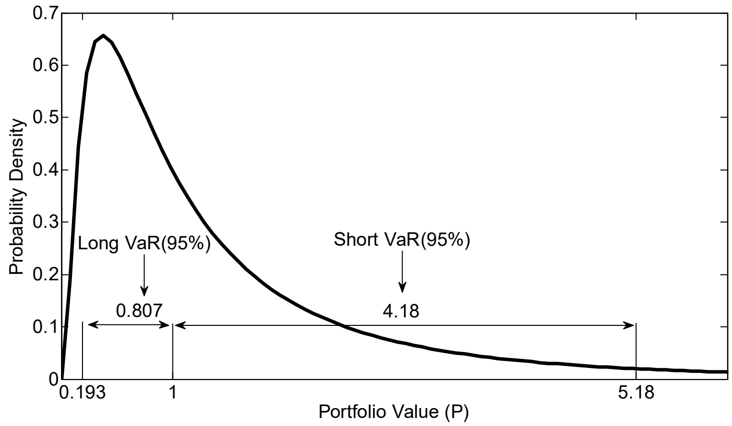
نکتهٔ قابل‌توجه در مورد توزیع لاگ‌نرمال، عدم‌تقارن[3] آن است و بنابراین به‌کارگیری آن به این معنی است که موقعیت‌های خرید[4] و فروش[5] به‌صورت نامتقارنی در معرض ریسک قرار دارد. زیان موقعیت خرید به‌هنگام کاهش قیمت‌ها و زیان موقعیت فروش به‌هنگام افزایش قیمت‌ها ایجاد می‌شود. بدیهی است که در هر توزیع متقارنی، ارزش درمعرض‌ریسک موقعیت خرید و فروش، تصویر آینه‌ای یکدیگرند که این امر نشان‌گر تقارن دنبالهٔ پایینی و بالایی است. در توزیع لاگ‌نرمال بدترین زیان حاصل از یک موقعیت خرید به اندازهٔ مبلغ سرمایه‌گذاری است و سنجه‌های ریسک به‌طورطبیعی برای مقادیر زیان‌های بزرگ‌تر محدود می‌شود. اما، یک موقعیت فروش می‌تواند متحمل زیان‌های بزرگ‌تری گردد. مثلاً، اگر شما سهمی را به‌صورت استقراضی بفروشید، دارای موقعیت فروشی هستید که زیان آن نامحدود است، چراکه قیمت دارایی برای حرکت رو به بالا با محدودیتی مواجه نیست. اما، اگر شما سهمی را بخرید، حداکثر زیان موقعیت خرید شما به اندازهٔ مبلغ خرید سهم است، چراکه حداکثر کاهش قیمت سهام به اندازهٔ قیمت آن است.

نمودار زیر ارزش‌درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال را برای موقعیت‌های خرید و فروش یک دارایی نشان می‌دهد. میانگین و انحراف‌معیار بازدهٔ هندسی این دارایی به‌ترتیب صفر و یک است و ارزش روز دارایی نیز واحد در نظر گرفته شده است.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، VaR در سطح اطمینان ۹۵٪ برای موقعیت خرید ۰/۸۰۷ و برای موقعیت فروش متناظر با آن ۴/۱۸ است. موقعیت فروش به‌طور بالقوه دارای ارزش درمعرض‌ریسک نامحدودی است، چراکه در دنبالهٔ کشیده سمت راست قرار می‌گیرد. توجه داشته باشید که این نمودار بر اساس داده‌های ارزش سبد دارایی رسم شده است.

---

1. geometric Brownian motion process (GBMP)
2. lognormal random walk
3. asymmetry
4. long position
5. short position



نمودار (۵-۳): ارزش درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال برای موقعیت‌های خرید و فروش

به‌طور خلاصه، رویکرد لاگ‌نرمال به جهت برقراری محدودیت‌های حداکثر زیان (حداقل بازده) برای موقعیت‌های خرید مطلوب است. مزیت دیگر این‌که با فرآیند حرکت براونی هندسی هم‌خوانی دارد؛ فرآیندی که تعدادی ویژگی مطلوب و پرکاربرد در زمینهٔ قیمت‌گذاری اوراق مشتقه دارد.

مثال (۵-۴): ارزش درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال

فرض کنید بازدهٔ هندسی دارای توزیع نرمال با میانگین ۰/۰۵ و انحراف‌معیار ۰/۲۵ است. قیمت جاری دارایی نیز ۱۰۰ تومان است. با استفاده از رابطهٔ ارزش درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال، VaR برای دورهٔ نگهداری یک‌روزه و در سطح اطمینان ۹۵ درصد به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$VaR = 100 \times \left(1 - \exp(0.05 - 0.25 \times 1.645)\right) = 30.32$$

مثال(۵-۵): ارزش درمعرض‌ریسک نرمال و لاگ‌نرمال برای موقعیت‌های خرید و فروش

فرض کنید سری بازدهٔ حسابی دارای توزیع نرمال با میانگین ۰/۱ و انحراف‌معیار ۰/۲۵ است و ارزش جاری سبد دارایی ۱۰۰ تومان می‌باشد. ارزش درمعرض‌ریسک نرمال برای موقعیت خرید در سطح اطمینان ۹۵٪ برابر است با:

$$VaR = -100\,(0.1 - 0.25 \times 1.645) = 31.12$$

ارزش درمعرض‌ریسک نرمال برای موقعیت فروش متناظر، دقیقاً برابر همین مقدار است. حالا فرض کنید که بازده‌های هندسی دارای توزیع نرمال با میانگین ۰/۱ و انحراف‌معیار ۰/۲۵ است. ارزش درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال برای موقعیت خرید در سطح اطمینان ۹۵٪ برابر است با:

$$VaR = 100\,\big(1 - \exp(0.1 - 0.25 \times 1.645\big) = 26.75$$

و ارزش درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال برای موقعیت فروش متناظر، برابر است با:

$$VaR = -100\big(1 - \exp(0.1 + 0.25 \times 1.645\big) = 66.74$$

همان‌طور که از نتایج برمی‌آید، در توزیع نامتقارنی مثل لاگ‌نرمال، ارزش درمعرض‌ریسک موقعیت خرید و فروش تصویر آینه‌ای یکدیگر نیست.

مدل‌های تلاطم تصادفی

یک رویکرد بسیار مؤثر جهت محاسبهٔ VaR، مدل‌سازی تلاطم به‌عنوان یک فرآیند تصادفی است. همان‌طور که در فصل قبل اشاره کردیم، با این‌که تلاطم‌ها تصادفی است، اما اگر امروز شاهد تلاطم بالایی باشیم، بالابودن تلاطم فردا نیز محتمل است. در این مدل‌ها تلاطم امروز غالباً به‌صورت تابعی تصادفی از یک یا چند تلاطم گذشته در نظر گرفته می‌شود. روش‌های متعددی برای تعیین این تابع وجود دارد. به‌عنوان مثال می‌توانیم تلاطم را از طریق یک فرآیند $GARCH$ مانند $GARCH(1,1)$ مدل‌سازی کنیم:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad \omega \geq 0,\ \alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta < 1 \quad (۱۰-۵)$$

که ε_{t-1} آخرین باقیماندهٔ بازده است و به‌عبارتی برابر با اختلاف بازدهٔ واقعی و بازدهٔ موردانتظار دورهٔ قبل (جملهٔ خطا) است. مقدار بالای β به این معنی است که تلاطم‌ها پایدار است و تغییرات آن‌ها مستلزم گذشت مدت زمانی طولانی است. مقدار بالای α بدین معنی است که تلاطم‌ها پرجنب‌وجوش بوده و نسبت به تحرکات بازار واکنش سریعی از خود نشان می‌دهد. همچنین می‌توانیم تلاطم‌های بازده را با استفاده از دیگر فرآیندهای

خانوادهٔ $GARCH$ مدل‌سازی کنیم. شاید بتوان مدل $EWMA$ را نیز جزء رویکردهای تلاطم تصادفی به‌حساب آورد، چراکه مدل‌های $GARCH$ در واقع تعمیمی از این مدل می‌باشد. در فصل چهارم مدل‌های $EWMA$ و خانوادهٔ $GARCH$ را به‌تفصیل تشریح نمودیم.

به‌عنوان گزینه‌ای دیگر، می‌توانیم برای مدل‌سازی تلاطم از مدل‌های تغییر رژیمِ زنجیرهٔ مارکوف[1] استفاده کنیم. در این مدل تلاطم‌ها شمار محدودی از مقادیر ممکن را اتخاذ می‌کند و گذارهای تصادفی تلاطم‌ها در طی زمان با یک ماتریس گذار[2] مدل‌سازی می‌شود. این ماتریس، احتمال تغییر از یک حالت به حالت دیگر را در اختیار می‌گذارد. در فصل یازدهم به بررسی زنجیرهٔ مارکوف و ماتریس گذار خواهیم پرداخت و به همین دلیل در این‌جا از ارایهٔ توضیحات بیشتر خودداری می‌کنیم.

برای برآورد VaR کافی است که تلاطم‌های تخمینی را در رابطهٔ (۵-۱) قرار دهیم. به این ترتیب برای هر دوره، یک تلاطم تخمینی خواهیم داشت که برآوردی از ارزش درمعرض‌ریسک در اختیارمان می‌گذارد. بدیهی است که در ارزش درمعرض‌ریسک نرمال، تلاطم‌ها بر اساس میانگین متحرک ساده برآورد می‌شود و بدین ترتیب تلاطم هر دوره تفاوت چندانی با تلاطم دورهٔ قبل نخواهد داشت. در واقع در این رویکرد، به آن معنا که در رویکردهای تلاطم تصادفی مشاهده می‌کنیم، تلاطم‌ها پیش‌بینی نمی‌شوند.

اگر ارزش درمعرض‌ریسک با استفاده از رویکردهای تلاطم تصادفی برآورد شود، برای نام‌گذاری معمولاً از مدل تلاطم تصادفی استفاده می‌کنیم. مثلاً، $GARCH(1,1)\ \ VaR$ به‌معنی ارزش درمعرض‌ریسکی است که تلاطم آن بر اساس مدل $GARCH(1,1)$ برآورد شده است. به همین ترتیب ممکن است از یک مدل شکل‌گیری بازدهٔ دارایی برای برآورد بازدهٔ موردانتظار استفاده نماییم. در این‌صورت برای نام‌گذاری VaR از نام مدل مربوطه نیز استفاده می‌کنیم. مثلاً، $ARMA(1,1)GARCH(1,1)\ \ VaR$ به معنی ارزش درمعرض‌ریسکی است که بازدهٔ موردانتظار آن بر اساس مدل $ARMA(1,1)$ و تلاطم آن بر اساس مدل $GARCH(1,1)$ برآورد شده است. اگر مدل پیش‌بینی بازده، گشت تصادفی باشد، با عدم‌ذکر نام مدل پیش‌بینی بازده، آن را مشخص می‌نماییم. مثلاً،

---

1. regime-switching Markov chain models
2. transition matrix

$EWMA\ \ VaR$ بیانگر ارزش درمعرض‌ریسکی است که مدل پیش‌بینی تلاطم آن $EWMA$ و مدل پیش‌بینی بازدهٔ آن، گشت تصادفی است.

مدل‌های متنوع پارامتریک

مدل‌هایی که در این‌جا معرفی می‌کنیم، نسبت به مدل‌های متداول، کمتر رایج است و دلیل اصلی آن، پیچیدگی آن‌هاست. ما این گروه را تحت عنوان مدل‌های متنوع پارامتریک بررسی می‌کنیم که شامل توزیع‌های بیضوی و هذلولی، مدل نرمال مرکب، مدل جهش-انتشار، مدل کاکس-باکس، توزیع خطای تعمیم‌یافته، توزیع‌های خانوادهٔ جانسون، خانوادهٔ پیرسون، چوله-t و لاندای تعمیم‌یافته و در نهایت، تقریب کورنیش- فیشر می‌باشد.

توزیع بیضوی[1] و توزیع هذلولی[2]

استفاده از توزیع‌های بیضوی و هذلولی روش دیگری برای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک است. این روش در سال‌های اخیر توسط ابرلین پیشنهاد شد.[3] توزیع‌های بیضوی، توزیع‌های متقارنی است که معمولاً در مدیریت ریسک مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. یعنی چولگی آن‌ها صفر است، اما کشیدگی آن‌ها از توزیع نرمال بیشتر است. این توزیع‌ها روابط ساده‌ای برای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک ایجاد می‌کند. این روابط بسیار شبیه روابط مربوط به توزیع نرمال می‌باشد و از این لحاظ دارای مزیت است. اگر توزیع بازدهٔ دارایی بیضوی باشد و پارامترهای موقعیت[4] و معیار[5] به‌ترتیب با μ و δ^2 مشخص شود، ارزش درمعرض‌ریسک برابر است با:

$$VaR_t = -P_{t-1}(\mu_t - \delta_t\, z_\alpha) \quad (۱۱-۵)$$

1. elliptical distribution
2. hyperbolic distribution
3. Eberlein (1999).
4. location parameter
5. scale parameter

که z_α، صدک حالت استاندارد (یعنی پارامتر موقعیت برابر صفر و پارامتر معیـار برابـر یک) توزیع بیضوی در سطح خطای αاست. کارکردن با توزیع‌های بیضوی در سطح یـک دارایی و نیز در سطح سبد دارایی آسان است که از مزیت‌های این توزیع به‌شمار می‌رود.

توزیع‌های بیضوی و هذلولی جزء خـانوادهٔ موقعیـت- معیـار[۱] اسـت و آن طبقـه‌ای از توزیع‌های احتمال تک‌متغیره است که با دو پارامتر موقعیت و معیار مشخص می‌شود. ایـن توزیع‌ها شامل توزیع‌های هذلولی، بیضوی، گوسی معکوس نرمال[۲] و نرمال (به‌عنوان یـک مورد خاص) می‌باشد. توزیع هذلولی تعمیم‌یافته[۳]، تعمیمی از این خانواده است. ایـن توزیـع پارامتر دیگری را نیز به توزیع هذلولی اضافه می‌کند و بنابراین، انعطاف بیشتری در برازش از خود نشان می‌دهد.

برای برآورد ارزش درمعرض‌ریسک بیضوی[۴] باید پارامترهـای آن را تخمـین بـزنیم و سپس مقادیر تخمینـی را در رابطـهٔ (۵-۱۱) جایگـذاری کنـیم. می‌تـوانیم μ را بـه‌عنوان میانگین در نظر گرفته و با استفاده از روش‌هایی ساده مانند حداقل مجذورات برآورد کنـیم. برای برآورد پارامتر دیگر می‌توان از روش حداکثر درست‌نمایی استفاده کرد. به‌طور کلی این توزیع‌ها به‌غیر از موارد خاص، هیچ راه‌حـل بسـته‌ای بـرای ارزش درمعرض‌ریسـک ارایـه نمی‌کند. شواهد حاکی از بهبود قابل‌ملاحظهٔ برآوردهای توزیـع بیضـوی نسـبت بـه توزیـع نرمال است.

مدل‌های نرمال مرکب[۵]

استفاده از مدل‌های نرمال مرکب، روش دیگری برای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک است. در این رویکرد فرض بر این است که بازده، معمولاً مطابق یک فرآیند خـاص نرمـال حاصل می‌شود، اما گاهی از فرآیند نرمال دیگری با واریانس بزرگ‌تر تبعیت می‌کنـد. یـک فرآیند معمولی نرمال مرکب بر اساس رابطهٔ (۵-۱۲) تعریف می‌شود:

---

1. location-scale family
2. normal inverse Gaussian
3. generalized hyperbolic distribution
4. elliptical VaR
5. normal mixture models

$$normal\ mixture\ process = (1-\delta_t)\ \varepsilon_{1,t} + \delta_t\ \varepsilon_{2,t} \quad and \quad \sigma_2^2 > \sigma_1^2 \qquad (۵-۱۲)$$

که $\varepsilon_{1,t}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ_1^2 و $\varepsilon_{2,t}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ_2^2 می‌باشد. متغیر δ_t یک متغیر تصادفی دوتایی[1] است که اغلب اوقات مقدار آن صفر است، اما گاهی هم یک می‌شود. احتمال یک‌شدن این متغیر را با p نشان می‌دهند. بر این اساس، اغلب اوقات متغیر نرمال مرکب، $\varepsilon_{1,t}$ است، اما برای زمان‌های کوتاهی هم $\varepsilon_{2,t}$ می‌شود. در این حالت فرآیند ترکیبی از واریانس بیشتری برخوردار است. بدین‌ترتیب اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک با توالی بیشتری ظاهر می‌شود و دنباله‌های توزیع نسبت به توزیع نرمال تعدیل‌نشده متراکم‌ترند.

گشتاورهای این مدل ترکیبی را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید.

میانگین	μ
واریانس	$[p\sigma_{1,t}^2 + (1-p)\ \sigma_{2,t}^2]$
چولگی	0
کشیدگی	$3[p\sigma_{1,t}^4 + (1-p)\sigma_{2,t}^4] / [p\sigma_{1,t}^2 + (1-p)\sigma_{2,t}^2]^2$

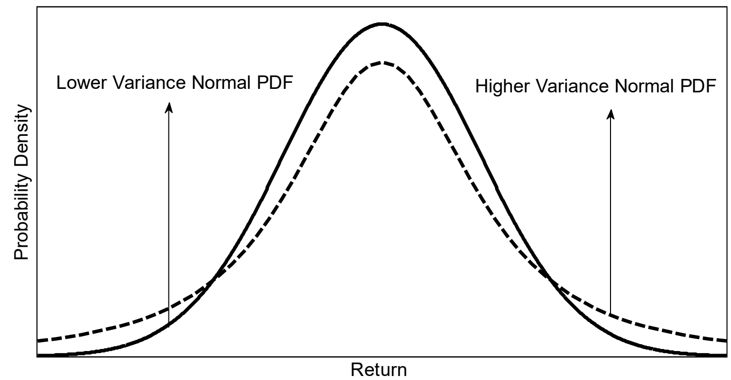
جدول (۵-۱): گشتاورهای توزیع نرمال مرکب

همان‌طور که در جدول فوق ملاحظه می‌کنید، مدل ترکیبی دارای چولگی صفر است و نسبت به توزیع نرمال کشیدگی بیشتری دارد.

مدل‌های نرمال مرکب دارای چندین مزیت است: آن‌ها به لحاظ مفهومی نسبتاً ساده‌اند؛ به‌وسیلهٔ آن‌ها می‌توان هر کشیدگی معقولی را به‌حساب آورد و از تخمین‌های استاندارد خطی نرمال برای برآورد واریانس‌ها و همبستگی‌ها بهره می‌گیرند. بدین‌ترتیب، قسمت عمدهٔ سهولت رویکردهای نرمال در آن‌ها حفظ می‌شود و حداقل برای سبدهای

1. binary random variable

کم‌تنوع، به تعداد نسبتاً کمی پارامتر نیازمند است. نمودار زیر تصویری از توزیع نرمال مرکب است.



نمودار (۵-۴): تصویری از یک توزیع نرمال مرکب

به‌هرحال به‌هنگام اجرای رویکرد ترکیبی، باید برآوردهایی از پارامترهای مربوطه به‌دست آورد و این کار در عمل سخت‌تر از آن است که به‌نظر می‌رسد. رایج‌ترین روش برای برآورد پارامترها، حداکثر درست‌نمایی است، اما متأسفانه تابع حداکثر درست‌نمایی برای توزیع نرمال مرکب یک ماکزیمم سراسری به‌دست نمی‌دهد و این امر رویکرد حداکثر درست‌نمایی را ناکارآمد می‌سازد. زنگاری و ونکاتارمن راه‌حل‌های دیگری را برای این مسأله پیشنهاد می‌کنند. زنگاری استفاده از ابزار نمونه‌گیری گیبس[1] و ونکاتارمن حداکثر درست‌نمایی گوسی-بیزی[2] را به‌عنوان راه‌حل ارایه می‌کنند.[3] جزییات این روش‌ها را می‌توانید در مقاله‌های آن‌ها بیابید.

به‌هنگام کاربرد مدل نرمال مرکب برای یک سبد دارایی باید به مسأله مهم دیگری توجه کنیم و آن این‌که چگونه عوامل ریسک هر دارایی که در عبارات دوتایی δ_t ظاهر می‌شود، با یکدیگر همبسته‌اند.

1. Gibbs sampling tool
2. Guasi-Bayesian maximum likelihood
3. Zangari (1996) and Venkatarman (1997).

پس از برآورد پارامترهای مدل مرکب، VaR همانند ارزش درمعرض‌ریسک نرمال محاسبه می‌شود.

مدل‌های جهش-انتشار[1]

در این روش برای نشان‌دادن دنباله‌های سنگین[2] توزیع بازده، فرض می‌شود که توزیع شامل اجزای عادی و غیرعادی[3] است. در این‌جا جزء غیرعادی یک متغیر جهش[4] می‌باشد که منعکس‌کنندهٔ حرکات بزرگ بازار است. این فرآیند به‌عنوان جهش-انتشار معروف است و اولین بار توسط مرتون[5] معرفی شد. فرآیند جهش-انتشار، تغییر در لگاریتم قیمت را به دو جزء زیر تجزیه می‌کند:

$$\Delta \log p_t = e_t + e_t^J \quad (۱۳-۵)$$

که e_t متغیر تصادفی نرمال بوده و جزء عادی توزیع است. میانگین این متغیر صفر و واریانس آن σ_t^2 است. e_t^J مجموع N_t متغیر تصادفی J_n است که $n=1,2,\ldots,N_t$ و هر J_n داری توزیع نرمال با میانگین μ_J و واریانس σ_J^2 است. N_t یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع پوآسون با میانگین λ است که λ میانگین تعداد جهش‌ها در هر روز می‌باشد. گشتاورهای مدل جهش در جدول زیر ارایه شده است.

میانگین	$\lambda\mu_J$
واریانس	$\sigma^2+\lambda(\mu_J^2+\sigma_J^2)$
چولگی	$\lambda\,\mu_J(\mu_J^2+3\sigma_J^2)$
کشیدگی	$3+\lambda(\mu_J^4+6\mu_J^2\,\sigma_J^2+3\sigma_J^4)$

جدول (۵-۲): گشتاورهای توزیع جهش-انتشار

1. jump-diffusion models
2. heavy tails
3. ordinary and extraordinary components
4. jump variable
5. Merton

همان‌گونه که از جدول پیداست، می‌توان از یک فرآیند جهش جهت احتساب چولگی و نیز کشیدگی فراتر از نرمال در توزیع موردنظر استفاده کرد. علامت λ تعیین‌کنندهٔ علامت چولگی است و اندازهٔ پارامتر تلاطم جهش (σ_J) تعیین‌کنندهٔ کشیدگی است.

فرآیند جهش–انتشار روش مفیدی جهت فراهم‌آوردن توزیع‌هایی با دنبالهٔ متراکم و یا در صورت نیاز توزیع‌های چوله در افق‌های زمانی کوتاه‌مدت است. اما، تخمین چنین مدل‌هایی بسیار مشکل است و ضرورتاً عملکردی بهتر از مدل‌های فاقد فرآیند جهش–انتشار ندارد.

شاید ساده‌ترین راه برای برآورد سنجه‌های ریسک در این مدل، استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو باشد. در این روش مسیرهای بسیار زیادی از فرآیند جهش–انتشار را تا انتهای دورهٔ نگهداری شبیه‌سازی می‌کنیم و بدین‌ترتیب تعداد زیادی قیمت پایانی فراهم می‌آید که سازندهٔ توزیع قیمت‌های پایانی سبد دارایی است. در نهایت، ارزش درمعرض‌ریسک را به شیوهٔ معمول از طریق محاسبهٔ صدک موردنظر برآورد می‌کنیم. نحوهٔ محاسبهٔ صدک بر اساس توزیع‌های شبیه‌سازی‌شده در فصل هفتم و به‌هنگام بررسی رویکردهای ناپارامتریک ارزش درمعرض‌ریسک تشریح می‌شود.

مدل باکس–کاکس[1]

یکی از روش‌های تخمین VaR، روش تبدیل باکس–کاکس[2] است. این رویکرد، روشی نسبتاً ساده است و برای بررسی داده‌های غیرنرمال کاربرد زیادی دارد. رویکرد باکس–کاکس برای موقعیت‌هایی بسیار مفید است که تصور می‌کنیم داده‌ها غیرنرمال است، اما درمورد توزیع واقعی آن‌ها اطلاعاتی در دست نیست. اگر مجموعهٔ داده‌ها را با X نشان دهیم تبدیل باکس–کاکس، یک متغیر مبدل[3] (X^{λ}) معرفی می‌کند که تقریباً دارای توزیع نرمال است:

$$X^{\lambda} = \begin{cases} (X^{\lambda} - 1)/\lambda & if \quad \lambda \neq 0 \\ Ln(X) & if \quad \lambda = 0 \end{cases} \quad (۱۴\text{–}۵)$$

1. Box-Cox model
2. Box-Cox transformation
3. transformed variable

λ را می‌توان با بیشینه‌سازی یک تابع احتمال نرمال، برآورد نمود.

برای تخمین ارزش درمعرض‌ریسک، باید این فرآیند تبدیل را در مورد داده‌ها به‌کار برد و ارزش درمعرض‌ریسک نرمال را بر روی داده‌های مبدل برآورد کرد. سپس با اجرای یک تبدیل معکوس باکس-کاکس[1] بر روی ارزش درمعرض‌ریسک نرمال، ارزش درمعرض‌ریسک باکس-کاکس محاسبه می‌شود.

توزیع خطای تعمیم‌یافته

روش دیگر، استفاده از توزیع خطای تعمیم‌یافته است. این توزیع جزء خانواده‌ای از توزیع‌هاست که بسته به مقدار پارامتر υ، اشکال متنوع و خاصی را به‌خود می‌گیرد. به‌عنوان مثال یک مورد خاص از این اشکال، توزیع نرمال است. بنابراین توزیع خطای تعمیم‌یافته را می‌توان به‌عنوان شکل منعطف‌تری از توزیع نرمال دانست. در این توزیع، بازده‌های استاندارد دارای تابع چگالی احتمالی با رابطهٔ (۵-۱۵) است:

$$f(r) = \frac{\upsilon \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\right)\left|\frac{r}{\lambda}\right|^{\upsilon}\right]}{\lambda 2^{(1+1/\upsilon)}\ \Gamma(1/\upsilon)} \quad (۵-۱۵)$$

که $\Gamma(1/\upsilon)$ تابع استاندارد گاما بوده و λ برابر است با:

$$\lambda = [2^{-(2/\upsilon)}\Gamma(1/\upsilon)\Gamma(3/\upsilon)]^{1/2} \quad (۵-۱۶)$$

این فرآیند به ازای $\upsilon = 2$، نرمال می‌شود، اما وقتی که $\upsilon < 2$، نسبت به توزیع نرمال دارای دنباله‌های سنگین‌تری است. بنابراین می‌توان مقدار υ را طوری انتخاب کرد که به کشیدگی موردنظر دست یافت. نتایج حاکی از این است که تخمین‌های رویکرد توزیع خطای تعمیم‌یافته نسبت به توزیع نرمال دارای بهبود قابل‌ملاحظه‌ای است.

1. reverse Box-Cox transformation

توزیع‌های خانوادهٔ جانسون[۱]، خانوادهٔ پیرسون[۲]، چوله-t [۳] و لاندای تعمیم‌یافته[۴]

می‌توان گشتاورهای تجربی[۵] را بر توزیع‌های خانوادهٔ جانسون، خانوادهٔ پیرسون، توزیع چوله-t و یا توزیع لاندای تعمیم‌یافته برازش کنیم. این توزیع‌ها بسیار منعطفند.

در صورتی‌که برآوردهایی از چهار گشتاور اول یک توزیع تجربی داشته باشیم، می‌توان این گشتاورها را بر یکی از این توزیع‌ها برازش نموده و سپس تخمین‌هایی از سنجه‌های ریسک آن توزیع به‌دست آورد. به هرحال انعطاف‌پذیری این توزیع‌ها بـه بهـای پیچیـدگی کاربرد آن‌ها تمام می‌شود، به‌طوری‌که به‌کارگیری هیچ‌کدام از آن‌ها کار ساده‌ای نیست.

تقریب کورنیش- فیشر[۶]

یک رویکرد بسیار متفاوت، تقریب کورنیش- فیشر است. این تقریب بر مبنـای بسـط کورنیش- فیشر می‌باشد که برای تعیین صدک‌های توزیع‌هایی که نزدیک به نرمال اسـت، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این بسط یک عامل تعدیل[۷] برای تعدیل صـدک‌های تخمینـی توزیع‌های غیرنرمال فراهم می‌آورد. این تعدیلات تا زمانی قابل‌اتکاست که میزان انحرافات از توزیع نرمال کوچک باشد.

اگر z_α را به‌عنوان صدک توزیـع نرمال‌اسـتاندارد در سـطح اطمینـان $1-\alpha$ در نظـر بگیریم، بسط کورنیش- فیشر به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\rho_3 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\rho_4 \\ & - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\rho_3^2 + higher - order\ terms \end{aligned} \qquad (۱۷-۵)$$

---

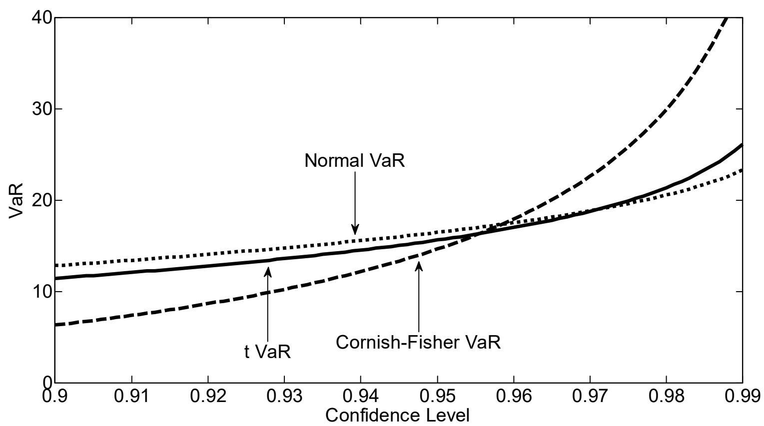
1. Johnson family distributions
2. Pearson family
3. skew-t
4. generalized lambda
5. empirical moments
6. Cornish-Fisher approximation
7. adjustment factor

که ρ_3 ضریب چولگی توزیع و ρ_4 کشیدگی آن می‌باشد. اگر جملات مراتب بالاتر را ناچیز قلمداد کنیم، این بسط به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)\rho_3 + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\rho_4 - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)\rho_3^2 \quad (۱۸-۵)$$

بدیهی است که نادیده‌گرفتن جملات مراتب بالاتر با این فرض که انحرافات از توزیع نرمال ناچیز است، هم‌خوانی دارد.

برای استفاده از این بسط، به‌سادگی z_α را در رابطهٔ (۵-۱۸) جایگزین می‌کنیم و به این ترتیب صدک تخمینی خود را به‌دست می‌آوریم. این کار معادل تعدیل z_α برای چولگی و کشیدگی غیرنرمال است. به‌هنگام استفاده از تقریب کورنیش- فیشر باید این نکته را در ذهن داشته باشیم که این بسط تنها در صورتی که توزیع موردنظر نزدیک به توزیع نرمال باشد، تقریب خوبی فراهم می‌آورد. بنابراین، اگر توزیع موردنظر انحراف زیادی از توزیع نرمال داشته باشد، نمی‌توان به تقریب‌های آن اتکا کرد. برای نشان‌دادن این نکته فرض کنید بازده دارای توزیع t با درجهٔ آزادی ۵، میانگین صفر و انحراف‌معیار ۰/۱ است و قیمت جاری دارایی ۱۰۰ تومان است. کشیدگی این توزیع ۹ می‌باشد، و مشخصاً با کشیدگی توزیع نرمال که برابر ۳ است، تفاوت فاحشی دارد. در نمودار (۵-۵)، ارزش درمعرض‌ریسک صحیح (ارزش درمعرض‌ریسک t)، نرمال و کورنیش- فیشر ارایه شده است.



نمودار (۵-۵): ارزش درمعرض‌ریسک t ، نرمال و کورنیش- فیشر با کشیدگی نسبتاً بالا

از این نمودار می‌توان فهمید که تقریب کورنیش- فیشر در چنین حالتی کاملاً ضـعیف عمل می‌کند. غیر از حوالی سطح اطمینان ۹۵٪، تقریب کورنیش- فیشر عموماً برآوردهایی از VaR ارایه می‌دهد که حتی بدتر از تخمین‌های نرمال می‌باشد. بنابراین، باید با احتیاط از آن استفاده کرد، چراکه در شرایط خاص ممکـن اسـت باعـث بدترشـدن تخمین‌هـا گـردد همچنان‌که ممکن است به بهبود آن‌ها کمک نماید.

مثال (۵-۶): تقریب کورنیش- فیشر:

فرض کنید قیمت کنونی دارایی ۱۰۰ تومان است و بازدهٔ آن دارای توزیع t با میانگین صفر و انحراف‌معیار ۰/۱ است. چولگی این توزیع صفر و کشیدگی آن ۹ است. می‌خـواهیم در سطح اطمینان ۹۵٪، ارزش درمعرض‌ریسک کورنیش- فیشر را به‌دست آوریم.

با توجه به روابطی که بیان شد، صدک تعدیل‌شده برابر است با:

$$1.645 + (1/24)(1.645^3 - 3 \times 1.645) \times 9 = 1.464$$

و بدین ترتیب ارزش درمعرض‌ریسک کورنیش- فیشر برابر است با:

$$VaR = 100 \times 0.1 \times 1.464 = 14.64$$

و این در حالی است که ارزش درمعرض‌ریسک نرمال برابر است با:

$$VaR = 100 \times 0.1 \times 1.645 = 16.45$$

برای به‌دست‌آوردن ارزش درمعرض‌ریسک واقعی می‌توانیم یک توزیع t با درجهٔ آزادی ۵ را بر پارامترهای چولگی و کشیدگی برازش کنیم. به این‌ترتیـب ارزش درمعرض‌ریسـک واقعی که همان ارزش درمعرض‌ریسک t است برابر است با:

$$VaR = 100 \times \sqrt{(5-2)/5} \times 2.015 \times 0.1 = 15.61$$

بنابراین ارزش درمعرض‌ریسک نرمـال برابـر ۱۶/۴۵ اسـت کـه بـا بـه‌کارگیری روش کورنیش- فیشر، تعدیل‌شده و مقدار آن ۱۴/۶۴ می‌شـود و ایـن در حـالی اسـت کـه ارزش درمعرض‌ریسک t (که بنا به مفروضات، مقدار واقعی VaR است.) برابـر ۱۵/۶۱ اسـت. بـا

مقایسه این ارقام، نتیجه می‌گیریم که در این مورد خاص به‌کارگیری روش کورنیش- فیشر به تعدیل بیش از حد منجر می‌شود، به‌گونه‌ای که استفاده از آن مفید نیست.

مدل‌های پارامتریک ارزش درمعرض‌ریسک سبد دارایی

تا این‌جا مدل‌هایی برای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک ارایه شد، اما به‌طور خاص در مورد ارزش درمعرض‌ریسک سبد دارایی‌ها سخنی به میان نیامد. البته، این بدان معنا نیست که محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک برای سبد دارایی متفاوت از دارایی‌های انفرادی است، بلکه تنها باید پارامترهای مربوط به سبد دارایی‌ها، جایگزین پارامترهای دارایی انفرادی شود. با این حال محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک سبد دارایی نسبت به دارایی‌های انفرادی از پیچیدگی بیشتری برخوردار است. در این‌جا به‌طور خاص دو رویکرد کلی محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک سبد دارایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که عبارتند از: رویکرد واریانس-کوواریانس چندمتغیرهٔ نرمال و رویکردهای واریانس-کوواریانس غیرنرمال

رویکرد واریانس-کوواریانس چندمتغیرهٔ نرمال[1]

در بسیاری مواقع برای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک سبد دارایی این فرض را اساس کار خود قرار می‌دهیم که بازدهٔ دارایی‌های انفرادی دارای توزیع چندمتغیرهٔ نرمال است. این فرض مترادف در نظرگرفتن توزیع نرمال برای بازدهٔ سبد می‌باشد.

فرض کنید سبدی از n دارایی مختلف داریم و بازده آن‌ها دارای توزیع چندمتغیرهٔ نرمال با میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس واریانس-کوواریانس Σ است. $\boldsymbol{\mu}$ یک بردار $n\times 1$ و Σ یک ماتریس $n\times n$ است که واریانس‌ها در قطر اصلی و کوواریانس‌ها در دیگر جایگاه‌های آن قرار دارد. بردار سطری $\mathbf{w}$ را به‌عنوان نسبت‌های سرمایه‌گذاری‌شده در هر دارایی درنظر بگیرید. ابعاد این بردار، $1\times n$ است. بدین ترتیب میانگین و واریانس سبد دارایی از طریق روابط زیر به‌دست می‌آید:

1. multivariate normal variance-covariance approach

$$\mu_p = \mathbf{w\mu} \qquad (۵-۱۹)$$

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}\sum\mathbf{w}^{\mathbf{T}} \qquad (۵-۲۰)$$

اگر قیمت سبد دارایی در دورهٔ $t\text{-}1$ را با P_{t-1} نشان دهیم، ارزش درمعرض‌ریسک طی h دورهٔ نگهداری و سطح اطمینان $1-\alpha$ برابر است با:

$$VaR_{ht} = -P_{t-1}(h\mu_{p,t} - \sqrt{h}\,\sigma_{p,t}\,z_\alpha) \qquad (۵-۲۱)$$

ریزش موردانتظار نیز طی h دورهٔ نگهداری و سطح اطمینان $1-\alpha$ برابر است با:

$$ES_{ht} = -P_{t-1}\left(h\mu_{p,t} - \sqrt{h}\,\sigma_{p,t}\,\frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha}\right) \qquad (۵-۲۲)$$

رویکردهای واریانس-کوواریانس غیرنرمال

اگر بر این اعتقاد باشیم که توزیع بازدهٔ سبد دارایی نرمال نیست، می‌توانیم از رویکرهای واریانس-کوواریانس غیرنرمال برای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک سبد دارایی استفاده کنیم. سه نمونه از این رویکردها عبارتند از:

- توزیع‌های چندمتغیرهٔ t
- توزیع‌های چندمتغیرهٔ بیضوی
- رویکرد هال-وایت جهت انتقال به نرمال‌بودن

توزیع‌های چندمتغیرهٔ t[1]

اگر بازده‌ها دارای توزیع چندمتغیرهٔ نرمال نباشد، هنوز هم این امکان وجود دارد که از رویکرد واریانس-کوواریانس استفاده کنیم. توزیع چندمتغیرهٔ t یکی از انتخاب‌های ماست که VaR و ES برای آن به‌ترتیب بر اساس روابط (۵-۲۳) و (۵-۲۴) تعریف می‌شود:

---

1. multivariate t-distributions

$$VaR_{ht} = -P_{t-1}\left(h\mu_{p,t} - \sqrt{h}\sqrt{\frac{\upsilon-2}{\upsilon}}\sigma_{p,t}t_{\upsilon,\alpha}\right) \quad (۲۳\text{-}۵)$$

$$ES_{ht} = -P_{t-1}\left(h\mu_{pt} - \sqrt{h}\sqrt{\frac{\upsilon-2}{\upsilon}}\sigma_{p,t}\frac{f(t_{\upsilon,\alpha})}{\alpha}\right) \quad (۲۴\text{-}۵)$$

که υ درجهٔ آزادی، $t_{\upsilon,\alpha}$ مقدار معکوس تـابع توزیـع تجمعـی t در درجـهٔ آزادی υ و سطح خطای α و $f(t_{\upsilon,\alpha})$ مقدار تابع چگالی احتمال توزیع t به ازای مقدار $t_{\upsilon,\alpha}$ است.

توزیع چندمتغیرهٔ t مزایای توزیع چندمتغیرهٔ نرمال را حفظ می‌کنـد، چراکـه از همـان پارامترها استفاده می‌کند و نیز کاربرد آن آسان است. این توزیع، در عین حال به مـا اجـازه می‌دهد که کشیدگی‌های فراتر از نرمال را در نظر بگیریم.

توزیع‌های چندمتغیرهٔ بیضوی[1]

به‌طور کلی می‌توانیم برای بازده‌هایی کـه دارای توزیـع چنـدمتغیرهٔ بیضـوی اسـت از رویکرد واریانس-کوواریانس استفاده کنیم. در این‌جا روابط مربوط بـه VaR و ES مشـابه روابط مربوط به توزیع چندمتغیرهٔ نرمال است، اما عموماً دارای پارامترهای موقعیت و معیـار متفـاوتی اسـت. مشـکل اسـتفاده از ایـن رویکردهـا، تخمـین پارامترهـای آن‌هاسـت. برآوردکننده‌های حداکثر درست‌نمایی فاقد راه‌حل‌هایی بسـته اسـت. اسـتفاده از روش‌هـای عددی نیز در صورت بزرگ‌بودن ابعـاد مسـأله، مشـکل اسـت. بـه‌هرحال در اغلـب مـوارد می‌توانیم مسأله تخمین پارامترها را به دو مرحلهٔ قابل‌کنترل تقسـیم کنـیم. در مرحلـهٔ اول، بردار میانگین و واریانس-کوواریانس را با استفاده از روش‌های استاندارد بـرآورد مـی‌کنیم. میانگین تخمینی، پارامتر موقعیت را در اختیارمان قـرار می‌دهـد. در مرحلـهٔ دوم، مـاتریس واریانس-کوواریانس تخمینی را به‌عنوان بـرآورد اولیـه، جهـت بـرآورد دیگـر پارامترهـا بـا الگوریتم‌های حداکثر درست‌نمایی ترکیب می‌کنیم.

1. multivariate elliptical distributions

رویکرد هال-وایت جهت انتقال به نرمال‌بودن[1]

یک رویکرد متفاوت توسط هال و وایت پیشنهاد شد.[2] آن‌ها پیشنهاد کردند که اگر بازده‌ها دارای توزیع چندمتغیرهٔ نرمال نباشد با تبدیل آن‌به توزیع چندمتغیرهٔ نرمال می‌توان از رویکرد واریانس-کوواریانس استفاده کرد. بدین ترتیب که رویکرد واریانس-کوواریانس را بر روی بازده‌های مبدّل پیاده می‌کنیم و در نهایت نتایج را جهت استخراج ارزش درمعرض‌ریسک واقعی به حالت اولیه برمی‌گردانیم. بنابراین، در این‌جا این فرض را که بازده‌ها دارای توزیع چندمتغیرهٔ نرمال است با فرض ضعیف‌تری مبنی بر این‌که آن‌ها قابل‌تبدیل به توزیع چندمتغیرهٔ نرمال است، جابجا می‌کنیم. این کار به ما اجازه می‌دهد که ویژگی‌های مفید رویکرد واریانس-کوواریانس از جمله سادگی آن را حفظ کنیم و در عین حال به ما اجازه می‌دهد که VaR و ES را با احتساب کشیدگی، چولگی و گشتاورهای مراتب بالاتر توزیع بازدهٔ چندمتغیره برآورد نماییم.

تصور کنید که m ابزار مالی مختلف در سبد خود داریم. e_{it} را بازدهٔ دارایی i در دورهٔ t و G_{it} را نیز یک تابع توزیع تجمعی فرضی برای e_{it} در نظر بگیرید. به‌طور کلی این تابع وابسته به زمان است و منعکس‌کنندهٔ عواملی مانند تلاطم $GARCH$[3] و فرآیندهای همبستگی[4] است. حالا e_{it} را به یک متغیر جدید یعنی f_{it} تبدیل می‌کنیم:

$$f_{it} = N^{-1}\left[G_{it}(e_{it})\right] \quad (۲۵-۵)$$

که N تابع توزیع تجمعی نرمال‌استاندارد و عبارت داخل براکت یعنی $G(e_{it})$، احتمال تجمعی متغیر e_{it} بر اساس تابع توزیع تجمعی $G(.)$ است. f_{it} نیز احتمال تجمعی متناظر در توزیع نرمال‌استاندارد است. رابطهٔ (۵-۲۵)، بازده یعنی e_{it} را به معادل نرمال‌استاندارد آن یعنی f_{it} تبدیل می‌کند. بنابراین، می‌توانیم این رابطه را جهت استخراج e_{it} معکوس کنیم:

---

1. Hull-White transformation-into-normality approach
2. Hull and White (1998).
3. GARCH volatility
4. correlation processes

$$e_{it} = G_{it}^{-1}\left[N(f_{it})\right] \quad (۲۶-۵)$$

بنابراین، رابطهٔ (۵-۲۵) به ما امکان تبدیل بازده‌ها را می‌دهد و رابطـهٔ (۵-۲۶) امکـان تبدیل معکوس آن‌ها را فراهم می‌آورد. G_{it} می‌تواند هر شکلی داشته باشد. بـه‌عنوان مثـال می‌توانیم یک توزیع خاص با دنبالهٔ متـراکم را بـه آن نسـبت دهـیم و یـا می‌تـوانیم آن را توزیعی تجربی در نظر بگیریم که برآمده از داده‌های اولیه است.

پس از تبدیل بازده‌ها، فرض می‌کنیم کـه بازده‌هـای مبـدل یعنـی f_{it} دارای توزیـع چندمتغیرهٔ نرمال است و بر این اساس، بردار میانگین و مـاتریس واریـانس-کوواریـانس را برآورد می‌کنیم. در ادامه، هال و وایـت پیشـنهاد می‌کننـد کـه از روش مونت‌کـارلو بـرای شبیه‌سازی مقادیر بازده‌هـای مبـدل (f_{it}) بـر اسـاس پارامترهـای میـانگین و واریـانس-کوواریانس تخمینی استفاده کنیم. سپس از رابطهٔ (۵-۲۶) جهت تبدیل معکوس داداه‌هـای مبدل شبیه‌سازی‌شده به همتای خـود یعنـی e_{it} اسـتفاده مـی‌کنیم تـا بـه مجموعـه‌ای از بازده‌های غیرنرمال شبیه‌سازی‌شده برسیم. سـرانجام می‌تـوانیم بـا اسـتفاده از یـک روش استاندارد، سنجهٔ ریسک موردنظر خود را برآورد نماییم. به‌عنوان مثال ایـن روش اسـتاندارد می‌تواند یک روش ناپارامتریک مبتنی بـر سـری‌های شبیه‌سازی‌شـده باشـد. رویکردهـای ناپارامتریک در فصل هفتم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کاربرد رویکرد هال-وایت آسان است و نسبت بـه رویکردهـای بیضـوی کـه کـاربرد محدودی دارند، می‌توان آن را برای یک مجموعهٔ بسیار گسترده از توزیع‌هـای چنـدمتغیرهٔ غیرنرمال به‌کار بست. بنابراین، این رویکرد به ما امکـان می‌دهـد کـه فراتـر از آنچـه کـه توزیع‌های بیضوی میسر می‌سازند، انحرافات از توزیع چندمتغیرهٔ نرمال را اداره کنیم. نتـایج گزارش‌شده توسط هال و وایت حاکی از این است که این رویکـرد در عمـل نتـایج بسـیار خوبی در پی داشته است.

محدودیت‌های رویکرد پارامتریک

رویکردهای پارامتریک، ابزار تحلیلی مفیدی برای بـرآورد سـنجه‌های ریسـک فـراهم می‌آورد، اما به‌علت مفروضات ساده‌کننده، دارای محدودیت‌هایی است. در ادامه به برخی از این محدودیت‌ها اشاره می‌کنیم:

روش پارامتریک مانند تمامی روش‌های محاسبهٔ VaR، چنین فرض می‌کند که ترکیب سبد دارایی در طول دورهٔ نگهداری تغییر نمی‌کند. ارزش درمعرض‌ریسک محاسبه‌شده به برآورد ریسک در سبد فعلی و در افق زمانی یا دورهٔ نگهداری موردنظر می‌پردازد. با تغییر ترکیب سبد دارایی، توزیع سود و زیان سبد با آنچه که در محاسبهٔ VaR منظور شده است، متفاوت خواهد بود.

بسیاری از روش‌های پارامتریک بر پایهٔ تقریب خطی ارزش سبد دارایی استوار است. لذا، این روش زمانی به‌درستی کار می‌کند که این تقریب خطی، تغییرات ارزش سبد دارایی را به شکل صحیح توصیف نماید. کفایت این تقریب خطی به انحنای[1] تابع تشریح‌کنندهٔ ارزش سبد دارایی بر حسب عوامل بازار بستگی دارد. انحنای تابع یادشده توسط گامای[2] سبد دارایی (مشتق دوم) نسبت به هر یک از عوامل بازار تعیین می‌شود. وجود گاما یا انحنا در تابع ارزش سبد دارایی، یکی از ویژگی‌های اختیارمعامله یا ابزارهای مشابه آن است. مفهوم ضمنی مطلب اخیر این است که کفایت تقریب خطی به‌وسیله تعداد اختیارمعامله‌های موجود در سبد و خواص آن‌ها تعیین می‌شود. در نتیجه ممکن است روش پارامتریک برای سبدهای متشکل از تعداد زیادی اوراق اختیارمعامله برآورد دقیقی از VaR ارایه ندهد.

به طور خاص، در مورد سبدهایی که تابع ارزش آن‌ها دارای انحنای رو به پایین باشد یا گامای آن‌ها کوچک‌تر از صفر باشد، تقریب خطی همیشه بزرگ‌تر از ارزش واقعی سبد دارایی است، به‌گونه‌ای که زیان برآوردشده بر حسب تقریب خطی بیشتر از مقدار واقعی آن است. به عبارت دیگر، روش‌های پارامتریکی که بر اساس تقریب خطی است، در این موارد VaR را بیش از مقدار واقعی برآورد می‌کند.

روش پارامتریک توزیع خاصی را برای تغییرات عوامل بازار در نظر می‌گیرد. در بسیاری از موارد این توزیع نرمال در نظر گرفته می‌شود. متأسفانه، توزیع واقعی تغییرات قیمت غالباً دارای دنباله‌های ضخیم‌تری نسبت به توزیع نرمال است. به عبارت دیگر، در توزیع واقعی، تغییرات بسیار بزرگ و بسیار کوچک نسبت به آنچه که در توزیع نرمال با واریانس مشابه پیش‌بینی می‌شود، بیشتر مشاهده می‌گردد. چنانچه توزیع بازده نرمال نباشد، استفاده از

1. curvature
2. gamma

توزیع نرمال برای انجام محاسبات، به برآوردهای غیردقیقی می‌انجامد. برای حل این مشکل باید از فنون پیشرفتهٔ آماری جهت انجام محاسبات بهره برد. برای این منظور از مدل‌هایی استفاده می‌شود که دنباله‌های متراکمی برای تابع توزیع تولید می‌کند.

در روش پارامتریک، تحلیل‌گر باید ماتریس واریانس–کوواریانس کلیهٔ دارایی‌های موجود در سبد دارایی را بداند، اما اکثر این اطلاعات متکی بر داده‌های تاریخی است. از آنجا که ارزش درمعرض‌ریسک به منظور سنجش «تغییرات احتمالی آتی» در ارزش بازار طراحی شده است، استفاده از برآوردهای تاریخی برای ماتریس واریانس–کوواریانس گزینهٔ مناسبی به نظر نمی‌رسد. در مواقع بروز بحران، همبستگی میان گروه‌های مختلف دارایی‌ها به‌صورت قابل‌ملاحظه‌ای تغییر می‌کند. این به معنای آن است که ارزش‌درمعرض‌ریسک محاسبه‌شده توسط روش پارامتریک ممکن است ریسک بالقوه را در مواقع بحرانی کمتر از میزان واقعی برآورد نماید.

در نهایت می‌توان گفت به موازات افزایش تعداد دارایی‌ها یا عوامل ریسک، تعداد عبارت‌های معادلهٔ واریانس سبد دارایی به‌صورت هندسی افزایش می‌یابد. لذا محاسبهٔ VaR با روش پارامتریک برای سبدهای بزرگ امری دشوار و زمان‌بر است.

نتیجه‌گیری

رویکردهای پارامتریک شامل مدل‌های متنوعی برای اندازه‌گیری ریسک است. این مدل‌ها هم در سطح موقعیت‌های انفرادی و هم در سطح سبد دارایی قابل‌کاربرد است. مهم‌ترین نقطهٔ قوت رویکردهای پارامتریک این است که بر اساس مفروضات نسبتاً کمی اطلاعات زیادی در مورد سنجه‌های ریسک در اختیارمان قرار می‌دهد و از آن‌جا که این رویکردها از اطلاعات موجود در مفروضات پارامتریک بهره می‌گیرد، در صورت صحت این مفروضات، عموماً نسبت به رویکردهای ناپارامتریک و نیمه‌پارامتریک برآوردهای بهتری از ریسک ارایه می‌دهد. مهم‌ترین نقطه‌ضعف رویکردهای پارامتریک نیز به همین مفروضات برمی‌گردد، چراکه در صورت غلط‌بودن آن‌ها، برآوردهای ریسک در معرض خطاهای بزرگی قرار می‌گیرد. بنابراین، در استفاده از رویکردهای پارامتریک بررسی صحت مفروضات بسیار مفید است. برای انجام چنین کاری، باید چند نکته را مورد توجه قرار دهیم:

- باید در مورد دامنهٔ مجاز داده‌ها اندیشه کنیم. آیا می‌خواهیم زیان‌ها یا بـازده‌هـا دارای مرز باشد؟
- باید چولگی و کشیدگی داده‌ها را مورد بررسی قرار دهیم. ایـن اطلاعـات در انتخـاب تابع توزیع، نقشی حیاتی ایفا می‌کند.
- باید در مورد وابستگی زمانی و یا شرطی‌بودن[1] داده‌هایمان کنجکاوی نماییم.
- اگر تنها به‌دنبال برآورد ریسک در یک سطح اطمینان خـاص و یـا سـطوح اطمینـان باریکی هستیم، هیچ ضرورتی برای برازش یک منحنی به کل توزیع وجود نـدارد. در این‌صورت می‌توانیم توزیعی را انتخاب کنیم که برازندهٔ سطح اطمینان و یا محدوده‌ای از سطوح اطمینان مورد علاقه باشد. یعنی باید به‌دنبال برازش محلی توزیع باشیم، نه برازش کلی آن.
- اگر مفروضات پارامتریک را در سطح سبد دارایی به‌کار می‌بریم، باید خصوصاً سـاختار وابستگی داده‌ها را مورد توجه قرار دهیم. باید تنهـا در صـورتی از فـرض چنـدمتغیرهٔ نرمال استفاده کنیم که از نزدیکی آن‌ها به این توزیع باخبر باشـیم. هم‌چنـین، بـرای تشریح رفتار داده‌ها نباید بیش از حد بر قضیهٔ گرایش مرکزی اتکا کنیم. اگر بخواهیم از قیود محدودکنندهٔ توزیع‌های چندمتغیرهٔ نرمال اجتناب کنیم، ممکن است بتـوانیم از گزینه‌هایی نظیر رویکردهای بیضوی یا رویکرد هال- وایت استفاده نماییم.
- به‌طور خلاصه نکتهٔ کلیدی برای موفقیت رویکردهای پارامتریک، ایجـاد مفروضـاتی منطقی و احتساب عدم‌اطمینان و نیز دانسته‌ها و اندیشه‌هایمان است.

منابع

۱. بابک لطفعلی‌ای.(۱۳۸۵)، پایان‌نامه: *استفاده از معیار ارزش درمعرض‌خطر برای محاسبهٔ ریسک سبد سهامی بانک صنعت و معدن، شرکتهای زیر مجموعه و شرکت‌های عضو*

---

1. conditionality

بورس اوراق بهادار تهران، دانشکده مدیریت و اقتصاد دانشگاه صنعتی شریف، استاد راهنما: دکتر احمد شربت اوغلی.

2. Allen, L., Boudoukh, J., Saunders, A. (2004), *Understanding Market, Credit and Operational Risk (The Value at Risk Approach)*, Blackwell Publishing Ltd.
3. Chmielewski, M.A. (1981), "Elliptical symmetric distributions: a review and bibliography," *International Statistical Review*, Vol. 49, pp. 67-74.
4. Dowd, K. (2005), *Measuring Market Risk*, John Wiley & Sons Ltd, Second Edition.
5. Eberlein, E. (1999), "Recent advances in more realistic risk management: the hyperbolic model," Mimeo, *University of Freiburg*.
6. Fang, K.T., Kotz, S. and Ng, K.W. (1990), *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman and Hall, London UK.
7. Fong, G. and Vasicek, O. A. (1997), "A multidimensional framework for risk analysis," *Financial Analysts Journal*, Vol. 53, No. 4, pp. 51-57.
8. Hull, J. and White, A. (1998),"Value at risk when daily changes in market variables are not normaly distributed," *Journal of Derivatives*, Vol. 5, pp. 9-19.
9. Moosa, I. A. and Bollen, B. (2002), "A benchmark for measuring bias in estimated daily value at risk," *International Review of financial analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 85-100.
10. RiskMetrics™ (1996), *RiskMetrics Technical Document*, J.P. Morgan, 4th Edition.
11. Venkatarman, S. (1997), "Value at risk for a mixture of normal distributions: The use of Guasi-Bayesian estimation techniques"

Federal Reserve Bank of Chicago, *Economic Perspectives* (March/April), pp. 3-13.

12. Zangari, P. (1996), "An improved methodology for measuring VaR" *RiskMetric™ Monitor*, Fourth Quarter, pp. 12-41.

فصل ششم

نظریهٔ ارزش فَرین

مقدمه

در فصل پیشین رویکردهای پارامتریک در قالب ارزش درمعرض‌ریسک تشریح شد. در این فصل نیز به بررسی رویکردهای پارامتریک مدل‌سازی ریسک می‌پردازیم. تفاوت‌های تکنیکی و ساختاری مباحث نظریهٔ ارزش فرین[1] با فصل گذشته ما را بر آن داشت تا در فصلی جداگانه به بررسی آن بپردازیم. هم‌چنین با وجود این‌که این فصل نیز در برگیرنده رویکردهای پارامتریک است، برای جلوگیری از تشابه اسمی، نام نظریهٔ ارزش فرین که هستهٔ اصلی مباحث فصل جاری است برای آن انتخاب گردید.

ارزش فرین[2]

مدیریت ریسک، مشکلات بسیاری در مواجهه با رویدادهای فرین[3] دارد. این نوع رویدادها، غیرمحتمل است ولی در صورت وقوع ممکن است بسیار پرهزینه باشد. به‌عبارتی دیگر احتمال رخداد این حوادث پایین است ولی اثرات بزرگی به‌همراه دارد. افت‌های شدید

1. extreme value theory (EVT)
2. extreme value
3. extreme events

بازار، قصور مؤسسات بزرگ در ایفای تعهدات، بحران بازار مالی[1] و بلایای طبیعی مثال‌هایی از این حوادث است. با توجه به اهمیت این حوادث، ارایهٔ برآوردهایی از سنجه‌های ریسک‌های فرین، یکی از کلیدی‌ترین مسائل مربوط به مدیریت ریسک است.

چگونگی برآورد چنین ریسک‌هایی ما را با مسأله دشواری روبرو می‌سازد. رویدادهای فرین طبق تعریف نادر است و بنابرین مشاهدات نسبتاً کمی در مورد آن‌ها در دست است و به‌راحتی نمی‌توان برآوردهایی قابل‌اتکا بر اساس این مشاهدات اندک تولید کرد. بدین ترتیب برآوردهای مربوط به ریسک‌های فرین از عدم‌اطمینان بالایی برخوردار خواهد بود و این عدم‌اطمینان خصوصاً زمانی محرز می‌گردد که در جستجوی ریسک‌های فرین نه فقط در محدودهٔ داده‌های مشاهده‌شده بلکه بسیار فراتر از آن باشیم.

بسیاری از تحلیل‌گران برای حل مشکل کمبود داده‌های فرین به مفروضاتی اتکا می‌کنند که متأسفانه بسیاری از آن مفروضات سؤال‌برانگیز است. آن‌ها عموماً توزیعی را به‌صورت اختیاری انتخاب و سپس آن را بر تمامی داده‌ها برازش می‌کنند. بدیهی است که توزیع برازش‌شده اغلب مشاهدات مرکزی را در خود جای می‌دهد، زیرا نسبت به مشاهدات فرین که پراکنده و کم‌تعداد است، شمار زیادی از این‌گونه مشاهدات مرکزی وجود دارد. بنابراین، این رویکرد زمانی مناسب است که به‌دنبال بخش مرکزی توزیع باشیم و بنا به دلایل یادشده تناسب آن برای ارزش‌های فرین در هاله‌ای از ابهام قرار دارد.

تلاش‌ها برای حل مسأله ارزش‌های فرین در نهایت به ارایهٔ نظریهٔ ارزش فرین منجر گردید. نظریهٔ ارزش فرین شاخه‌ای از آمار کاربردی است که برای حل چنین مسائلی توسعه یافته است. این نظریه بر تمایز ارزش‌های فرین و نیز نظریه‌هایی تمرکز دارد که باید در راستای آن ارایه گردد. جای تعجب نیست که نظریهٔ ارزش فرین متفاوت از مفاهیم آشنای آماری‌ای است که تا کنون با آن‌ها سروکار داشته‌ایم. دلیل اصلی این است که مفاهیم آماری اغلب بر مبنای قضیهٔ حد مرکزی[2] است، تا جایی که به این قسمت از آمار، آمار گرایش مرکزی[3] گویند. در حالی‌که ارزش‌های فرین بر اساس قضیه‌های ارزش فرین[4] شکل می‌گیرد. نظریهٔ ارزش فرین از این قضایا برای تشریح توزیع‌هایی استفاده می‌کند که

1. financial market crisis
2. central limit theorem (CLT)
3. central tendency statistics
4. extreme value theorems

برازندهٔ داده‌های فرین است. این نظریه هم‌چنین به ما در جهت چگونگی برآورد پارامترهای مربوطه یاری می‌رساند. توزیع‌های ارزش‌های فرین با توزیع‌های آشنای مربوط به آمار گرایش مرکزی کاملاً متفاوت است. هم‌چنین پارامترهای آن متفاوت و برآورد آن‌ها نیز سخت‌تر است.

استفاده از نظریهٔ ارزش فرین در مواجهه با ارزش‌های فرین دارای مزیت‌هایی است:

- اول این‌که بر اساس گفته‌های پیشین، توزیع داده‌ها را تنها می‌توان در جایی نزدیک به مرکز توزیع به‌خوبی برآورد کرد، چراکه مشاهدات زیادی در این ناحیه قرار می‌گیرد. از سوی دیگر ارزش‌های فرین نادر است و طبق تعریف، مشاهدات کمی در دنباله‌های توزیع وجود دارد. بدیهی است که این امر استفاده از توزیع‌های آماری شناخته‌شده را جهت تعیین رفتار دنباله‌ها دچار مشکل می‌نماید.
- دوم این‌که بر اساس مطالعات انجام‌گرفته وجود دنباله‌های متراکم و خصوصاً غیرنرمال در سری بازدهٔ مالی مشهود است. تحت چنین شرایطی استفاده از رویکردهای ناپارامتریک برای تخمین دنباله‌های آماری معقول‌تر به‌نظر می‌رسد. بدیهی است که در این شرایط تحمیل یک توزیع شناخته‌شدهٔ آماری بر مشاهدات‌مان چندان قابلیت توجیه ندارد. این دقیقاً جایی است که نظریهٔ ارزش فرین جهت برآورد دنباله‌ها به دادمان می‌رسد.
- سوم این‌که همیشه این احتمال وجود دارد که تحرکات فرین[1] در قیمت دارایی‌ها توسط سازوکارهایی ایجاد شوند که به‌لحاظ ساختاری از عملکرد معمول بازار متفاوت باشد. مثلاً، یک مشاهدهٔ فرین ممکن است در اثر یک نکول بزرگ یا یک حباب سفته‌بازی ایجاد گردد. طی این دوره‌ها ممکن است مشخصات توزیعی مربوط به داده‌ها تغییر کند. این تغییرات ساختاری مستلزم جداسازی برآورد دنباله از باقی توزیع است. این امر خصوصاً زمانی که به مابقی توزیع چگالی نیازی نیست، مثلاً، در محاسبات ارزش درمعرض‌ریسک، بسیار مفید است.

در ادامه، به معرفی نظریهٔ ارزش فرین و چگونگی استفاده از آن جهت برآورد سنجه‌های ریسک بازار می‌پردازیم.

---

1. extreme movements

نظریهٔ تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین[1]

اجازه دهید $f(x)$ تابع چگالی احتمال و $F(x)$ تابع توزیع تجمعی X باشد. همچنین اجازه دهید که توالی متغیر X را در دوره‌های $1,2,\ldots,n$ با $X_1,X_2,\ldots,X_n$ نشان دهیم. ارزش‌های فرین به‌عنوان حداکثرها[2] و حداقل‌های[3] n متغیر تصادفی $X_1,X_2,\ldots,X_n$ تعریف می‌شود که مستقل از هم‌بوده و دارای توزیع‌های یکسان است. ما بالاترین میزان یا حداکثر متغیر X را در طی n دوره با $X_{\max,n}$ و پایین‌ترین مقدار یا حداقل آن را با $X_{\min,n}$ نمایش می‌دهیم. یعنی:

$$X_{\max,n} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \quad (۶-۱)$$

$$\begin{aligned} X_{\min,n} &= \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ &= -\max(-X_1, -X_2, \ldots, -X_n) \end{aligned} \quad (۶-۲)$$

منظور از $X_{\max,n}$ متغیر حداکثری است که از نمونه‌ای تصادفی به اندازهٔ n حاصل شده است. و منظور از $X_{\min,n}$ متغیر حداقلی است که از نمونه‌ای تصادفی به اندازهٔ n به‌دست آمده است.

گامبل در سال ۱۹۵۸ نشان داد اگر متغیرهای $X_1,X_2,\ldots,X_n$ به‌لحاظ آماری مستقل از یکدیگر بوده و دارای توزیع‌های یکسانی باشند، توزیع دقیق حداکثرها را می‌توان به‌عنوان تابعی از توزیع مادر[4] یعنی $F(x)$ و طول دورهٔ انتخابی یعنی n بازگو نمود:[5]

$$H_{\max,n}(x) = \left[F(x)\right]^n \quad (۶-۳)$$

---

1. generalized extreme value theory (GEVT)
2. maxima
3. minima
4. parent distribution
5. Gumbel (1958).

که $H_{\max,n}(x)$ توزیع دقیق $X_{\max,n}$ است. به همین ترتیب توزیع دقیق حـداقل‌ها از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$H_{\min,n}(x) = 1 - \left[1 - F(x)\right]^n \quad (۴-۶)$$

در عمل، توزیع دقیق متغیر مادر ناشناخته است و اگر این توزیع ناشناخته باشد، توزیـع دقیق ارزش‌های فرین نیز مشخص نخواهد بود. به همین دلیل رفتار تقریبی متغیر حـداکثر $X_{\max,n}$ و متغیر حداقل $X_{\min,n}$ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. دقت داشته باشید که از این به بعد اندیس n را حذف می‌کنیم و متغیر حداکثر و حـداقل را بـه‌ترتیب بـا $X_{\max}$ و $X_{\min}$ نمایش می‌دهیم.

بر اساس قضیهٔ فیشر و تیپت[1]، با بزرگ‌شدن n، توزیع ارزش‌های فرین یعنـی $X_{\max}$ به توزیع تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین نزدیک می‌شود:

$$H_{\xi,\mu,\sigma}(x_{\max}) = \begin{cases} if \quad \xi_{\max} \neq 0 \\ \exp\left\{-\left[1+\xi_{\max}\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)^{-1/\xi_{\max}}\right]\right\} \\ if \quad \xi_{\max} = 0 \\ \exp\left\{-\exp\left[-\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]\right\} \end{cases} \quad (۵-۶)$$

بدیهی است، که حد رابطهٔ اول زمانی که ξ به سمت صفر میل می‌کند برابر اسـت بـا رابطهٔ دوم. بر این اساس، جنکینسون[2] پیشنهاد کرد که توزیع تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین تنها با رابطهٔ (۶-۶) نمایش داده شود:

$$H_{\xi,\mu,\sigma}(x_{\max}) = \exp\left\{-\left[1+\xi_{\max}\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)^{-1/\xi_{\max}}\right]\right\} \quad (۶-۶)$$

---

1. Fisher and Tippet theorem
2. Jenkinson

که $H_{\xi,\mu,\sigma}(x_{\max})$ تابع توزیع تجمعی متغیر حداکثر است. برای به‌دست‌آوردن احتمال تجمعی متغیر حداکثر، باید محدودیتی با رابطهٔ (۶-۷) برآورده گردد.

$$1+\xi_{\max}\left(\frac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\geq 0 \quad (۶-۷)$$

این توزیع سه پارامتر دارد. دو پارامتر اول، $\mu_{\max}$ و $\sigma_{\max}$ است. $\mu_{\max}$ پارامتر موقعیت توزیع است و سنجهٔ گرایش مرکزی $X_{\max}$ می‌باشد. $\sigma_{\max}$ پارامتر معیار توزیع است و سنجهٔ پراکندگی $X_{\max}$ است. این پارامترها با پارامترهای آشنای میانگین و انحراف‌معیار در ارتباط است، اما در عین حال با آن‌ها تفاوت دارد. پارامتر سوم $\xi_{\max}$ است که شاخص دنباله[1] بوده و بر شکل یا تراکم دنبالهٔ توزیع دلالت دارد.

توزیع تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین دارای سه حالت خاص است:

- اگر $\xi_{\max}>0$، توزیع تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین به توزیع فرچت[2] مبدل می‌شود. این توزیع زمانی استفاده می‌شود که دنبالهٔ $F(x)$ متراکم است. توزیع‌هایی که در این طبقه جای می‌گیرد شامل توزیع لوی[3]، توزیع t، توزیع پرتو[4]، کوچی[5] و توزیع‌های مرکب[6] است. این حالت خصوصاً برای بازده‌های مالی مفید است، چراکه عموماً دنباله‌های متراکم دارد. شاخص دنباله در اغلب بازده‌های مالی، مثبت و در عین حال کوچک‌تر از ۰/۳۵ می‌باشد.
- اگر $\xi_{\max}=0$، توزیع تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین به توزیع گامبل[7] تبدیل می‌شود و آن زمانی است که $F(x)$ دارای دنباله‌های توزیع نمایی باشد. دنباله‌های توزیع نمایی

---

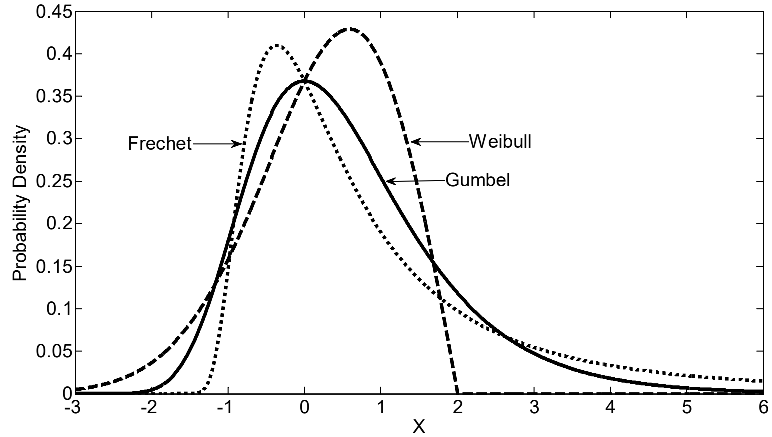
1. tail index
2. Frechet distribution
3. Levy distribution
4. Pareto distribution
5. Cauchy
6. mixture distributions
7. Gumbel distribution

نسبتاً دنباله‌هایی سبک[1] (کم‌تراکم) است. از جمله توزیع‌هایی که در دامنهٔ جذب[2] توزیع گامبل قرار می‌گیرد توزیع نرمال، نمایی، گاما[3] و لاگ‌نرمال است که از میان آن‌ها تنها توزیع لاگ‌نرمال دارای دنبالهٔ نسبتاً متراکمی است.

- اگر $\xi_{\max} < 0$، توزیع تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین به توزیع ویبول[4] بدل می‌گردد و آن حالتی است که $F(x)$ دارای دنباله‌هایی کم‌تراکم‌تر از دنباله‌های توزیع نرمال است. بدیهی است که توزیع ویبول خصوصاً برای مدل‌سازی بازده‌های مالی مناسب نیست، چراکه سری بازدهٔ مالی اغلب دنباله‌هایی به این کم‌تراکمی ندارد. از جمله توزیع‌هایی که در دامنهٔ جذب توزیع ویبول قرار می‌گیرند، توزیع یکنواخت[5] و بتا[6] است.

در نمودار (۶-۱) توابع چگالی احتمال فرچت، گامبل و ویبول استانداردشده ارایه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، توابع چگالی احتمال استانداردشده فرچت و گامبل (یعنی $\mu_{\max} = 0$ و $\sigma_{\max} = 1$)، چوله به‌سمت راست است، اما توزیع فرچت نسبت به گامبل دارای چولگی بیشتری است و به‌طرز قابل‌ملاحظه‌ای دنبالهٔ سمت راست آن طولانی‌تر است.

1. light tails
2. domain of attraction
3. gamma distribution
4. Weibull distribution
5. uniform distribution
6. beta distribution



نمودار (۶-۱): توابع چگالی احتمال فرچت، گامبل و ویبول استانداردشده

بنابراین، تولید مقادیر بسیار بزرگ X در توزیع فرچت به‌طرز قابل‌ملاحظه‌ای محتمل‌تر است. در نتیجه، می‌توان گفت توزیع فرچت دارای متراکم‌ترین دنباله و توزیع ویبـول دارای کم‌تراکم‌ترین دنباله است. توزیع گامبل نیز در جایی بین این دو توزیع قرار دارد.

تخمین پارامترها

برای تخمین سنجه‌های ریسک بایـد پارامترهـای توزیـع تعمیم‌یافتـهٔ ارزش فـرین را برآورد کنیم. این پارامترها $\mu_{\max}$، $\sigma_{\max}$ و $\xi_{\max}$ است. با برآورد این پارامترها و جایگذاری آن‌ها در تابع تجمعی توزیع تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین، به‌راحتی می‌توانیم صدک‌های موردنظر خود را محاسبه کنیم. سه رویکرد جهت تخمین پارامترها وجود دارد که به تشریح هرکـدام می‌پردازیم.

روش حداکثر درست‌نمایی

روش حداکثر درست‌نمایی محتمل‌ترین برآوردکننده‌ها را استخراج می‌کند. برای کاربرد این روش، ابتدا تابع احتمال و یا لگاریتم احتمال را ایجاد می‌کنیم. بـدیهی اسـت کـه تـابع احتمال از روی تابع چگالی احتمال حاصل می‌شود. تابع چگالی احتمال توزیع GEV عبارت است از:

$$h_{\xi,\mu,\sigma}(H;x_{\max})=\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$
$$\times\left[1+\xi_{\max}\left(\frac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]^{-\left(\frac{1+\xi_{\max}}{\xi_{\max}}\right)} \qquad (۸-۶)$$
$$\times\exp\left[-\left(1+\xi_{\max}\left(\frac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right)\right]^{\frac{-1}{\xi_{\max}}}$$

بدین ترتیب تابع لگاریتم احتمال نیز به‌صورت رابطهٔ (۶-۹) خواهد بود:

$$\ln L_h=\begin{cases} if\ \xi_{\max}\neq 0 \\ -n_e\ln\sigma_{\max} \\ -\left(\dfrac{1+\xi_{\max}}{\xi_{\max}}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{n_e}\ln\left[1+\xi_{\max}\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right] \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{n_e}\ln\left[1+\xi_{\max}\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]^{\frac{-1}{\xi_{\max}}} \\ \\ if\ \xi_{\max}=0 \\ -n_e\ln\sigma_{\max} \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{n_e}\exp\left[-\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]-\displaystyle\sum_{i=1}^{n_e}\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right) \end{cases} \qquad (۹-۶)$$

بخش دوم رابطهٔ فوق بر اساس حد بخش اول و به‌ازای $\xi_{\max}\to 0$، حاصل شده است. بنابراین، می‌توانیم بخش اول این رابطه را به‌عنوان رابطهٔ عمومی لگاریتم احتمال GEV در نظر بگیریم. در روابط فوق، n_e اندازهٔ نمونهٔ ارزش‌های فرین (حداکثر) می‌باشد

که با n_e بار نمونه‌گیری از جامعهٔ مادر به‌دست آمده است و همان‌طور که پیش‌تر گفتیم اندازهٔ نمونه‌هایی را که ارزش‌های فرین را از آن‌ها استخراج می‌کنیم، با n نمایش می‌دهیم.

برای تخمین پارامترها کافی است که تابع لگاریتم احتمال GEV را با توجه به محدودیت زیر حداکثر نماییم:

$$1+\xi_{\max}\left(\frac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\geq 0 \qquad (۶-۱۰)$$

روش حداکثر درست‌نمایی دارای ویژگی‌های جذابی است. از جمله این‌که به‌لحاظ آماری دارای پایهٔ نظری محکمی است؛ برآوردکننده‌ها سازگار[1] و در صورتی‌که $\xi \geq -1/2$، مجانباً[2] نرمال است. هم‌چنین به‌راحتی می‌توانیم فرضیات مربوط به پارامترها را با استفاده از آماره‌های نسبت احتمال[3] آزمون کنیم. از سوی دیگر، این روش هیچ راه‌حل بسته‌ای را برای برآورد پارامترها در اختیار قرار نمی‌دهد و از این رو کاربرد رویکرد حداکثر درست‌نمایی مستلزم استفاده از یک روش عددی[4] و یا الگوریتم‌های جستجوی[5] مناسب می‌باشد. استفاده از روش‌های عددی، اجبار در استفاده از یک نرم افزار مناسب را به‌همراه دارد و در نتیجه همیشه خطر عدم‌توانمندی این روش، در کمین است. علاوه بر این‌ها، از آن‌جا که نظریهٔ زیربنایی این رویکرد، مجانبی است، کوچک‌بودن نمونه‌ها مشکلات بالقوه‌ای پیش روی قرار می‌دهد.

روش رگرسیون

راه ساده‌تر برای تخمین پارامترها استفاده از یک روش رگرسیون است که در سال ۱۹۵۸ توسط گامبل پیشنهاد شد. برای نشان‌دادن چگونگی عملکرد این روش، کار را با مرتب‌کردن نمونهٔ ارزش‌های حداکثر یعنی $X_{\max,n_e}$ شروع می‌کنیم. توجه کنید که n_e اندازهٔ نمونهٔ ارزش‌های فرین است و آن را با اندازهٔ نمونه‌هایی که ارزش‌های فرین از آن‌ها

1. consistent
2. asymptotically
3. likelihood ratio statistics
4. numerical method
5. search algorithms

حاصل شده‌اند یعنی n، اشتباه نگیرید. توالی ارزش‌های حداکثر را که با $X_{\max,n_e}, X_{\max,n_e-1},\ldots,X_{\max,1}$ نشان می‌دهیم از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و به این ترتیب به آماره‌های ترتیبی ارزش‌های حداکثر یعنی $\hat{X}_{\max,n_e}, \hat{X}_{\max,n_e-1},\ldots,\hat{X}_{\max,1}$ دست می‌یابیم. این آماره‌ها شرط زیر را برآورده می‌سازد:

$$\hat{X}_{\max,n_e} \leq \hat{X}_{\max,n_e-1} \leq \ldots \leq \hat{X}_{\max,1} \quad (۱۱-۶)$$

که i، شماره آماره است و آن را در محدودهٔ ۱ تا n_e تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب میانگین فراوانی تجمعی «i»امین مقدار برابر است با:

$$\frac{n_e - i + 1}{n_e + 1} \qquad (۱۲-۶)$$

برای «i»امین مقدار، فراوانی تجمعی مشاهدات فرین یعنی $H_{\xi,\mu,\sigma}(\hat{x}_{\max,i})$ متغیری تصادفی است که بین صفر و یک قرار دارد. روش رگرسیون، تابع توزیع تجمعی این مشاهدات مرتب‌شده را برابر میانگین نظری آن‌ها قرار می‌دهد:

$$\begin{aligned} E\left[H_{\xi,\mu,\sigma}(\hat{x}_{\max,i})\right] &= E\left[\exp\left\{-\left[1+\xi_{\max}\left(\frac{\hat{x}_{\max,i}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)^{-1/\xi_{\max}}\right]\right\}\right] \\ &= \frac{n_e - i + 1}{n_e + 1} \qquad (۱۳-۶) \\ &\Rightarrow H_{\xi,\mu,\sigma}(\hat{x}_{\max,i}) \approx \frac{n_e - i + 1}{n_e + 1} \end{aligned}$$

که $H_{\max,n}(\hat{x}_{\max,i})$ تابع توزیع تجمعی مشاهدات حداکثر می‌باشد.

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\exp\left\{-\left[1+\xi_{\max}\left(\frac{\hat{x}_{\max,i}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)^{-1/\xi_{\max}}\right]\right\} \approx \frac{n_e - i + 1}{n_e + 1} \quad (۱۴-۶)$$

از رابطهٔ فوق، دو بار لگاریتم می‌گیریم تا به شکل ساده‌تری تبدیل شود:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\xi_{\max}}\log\left[1+\xi_{\max}\left(\frac{\hat{x}_{\max,i}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]\\&\approx\log\left[-\log\left(\frac{n_e-i+1}{n_e+1}\right)\right]\end{aligned} \tag{۶-۱۵}$$

سپس جملهٔ خطا را به سمت راست اضافه می‌کنیم تا به یک تساوی تبدیل گردد:

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\xi_{\max}}\log\left[1+\xi_{\max}\left(\frac{\hat{x}_{\max,i}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]\\&=\log\left[-\log\left(\frac{n_e-i+1}{n_e+1}\right)\right]+\varepsilon_i\end{aligned} \tag{۶-۱۶}$$

و در نهایت پارامترها را از طریق کمینه‌کردن مجموع مجذورات خطا با استفاده از معادلات رگرسیون غیرخطی، برآورد می‌کنیم.

توجه داشته باشید که اگر $\xi = 0$، رابطهٔ (۶-۱۶) به این صورت درمی‌آید:

$$\left(\frac{\hat{x}_{\max,i}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)=\log\left[-\log\left(\frac{n_e-i+1}{n_e+1}\right)\right]+\varepsilon_i \tag{۶-۱۷}$$

رابطهٔ فوق بر اساس حد رابطهٔ (۶-۱۶) به ازای $\xi_{\max} \to 0$، استخراج می‌شود و بازهم استفاده از معادلات رگرسیون غیرخطی جهت تخمین پارامترها کارساز خواهد بود.

روش نیمه‌پارامتریک

این امکان وجود دارد که پارامترها را بر اساس یک روش نیمه‌پارامتریک تخمین بزنیم. از برآوردکننده‌های نیمه‌پارامتریک اغلب برای برآورد شاخص دنباله استفاده می‌شود و

معروف‌ترین آن‌ها برآوردکنندۀ هیل[1] است. این برآوردکننده مستقیماً از مشاهدات مرتب‌شده حاصل می‌شود. اگر توالی مشاهدات مرتب‌شده را از بزرگ به کوچک به‌صورت $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{k,n}$ نشان دهیم، برآوردکنندۀ هیل با رابطۀ زیر تعریف می‌شود:

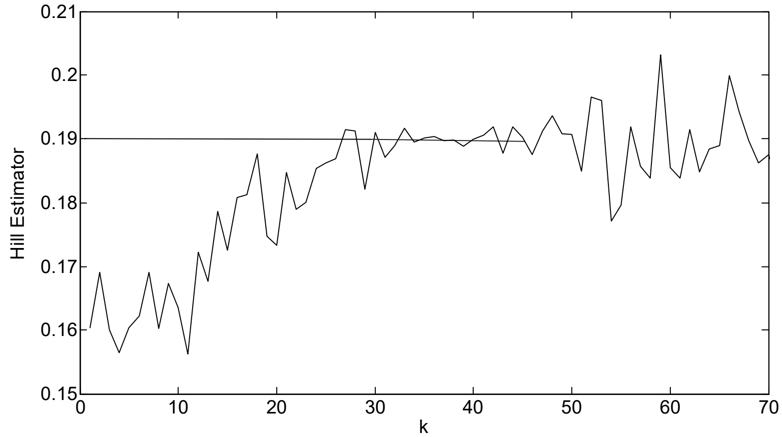
$$\hat{\xi} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} \ln X_{i,n} - \ln X_{k,n} \quad for\ k \geq 2 \ (۱۸\text{–}۶)$$

که k شمارۀ بالاترین آمارۀ ترتیبی است. برآوردکنندۀ هیل میانگین اختلاف k-1 مشاهدۀ فرین (فرین‌ترین مشاهدات) از مشاهدۀ «k»ام است. بدیهی است که مشاهدۀ «k»ام، اولین مشاهده بعد از دنباله است؛ یعنی مشاهده‌ای است که دیگر جزء مشاهدات فرین محسوب نمی‌شود و بنابراین مشاهدۀ آستانه می‌باشد. برآوردکنندۀ هیل، برآوردکننده‌ای سازگار و مجانباً دارای توزیع نرمال است، اما ویژگی‌های نمونۀ کوچک[2] این برآوردکننده مناسب ارزیابی نمی‌شود. در ادبیات نظریۀ ارزش فرین مشکلاتی راجع به ویژگی‌های نمونۀ کوچک این برآوردکننده و حساسیت آن نسبت به انتخاب k گزارش شده است. با این وجود بسیاری از متخصصان نظریۀ ارزش فرین، از آن به‌عنوان برآورکننده‌ای مناسب یاد می‌کنند.

بدیهی است که در تخمین شاخص دنباله، مسأله اصلی انتخاب k است. می‌دانیم برآوردکنندۀ شاخص دنباله نسبت به انتخاب k حساس است، اما در ادبیات هیچ رهنمودی برای تعیین دقیق مقدار k وجود ندارد. اغلب پیشنهاد می‌شود که برآوردکنندۀ هیل را برای محدوده‌ای از مقادیر k محاسبه کنیم و امیدوار باشیم که این برآوردکننده نسبت به برخی از مقادیر k از ثبات بیشتری برخوردار باشد. اگر نمودار هیل[3] برای برخی از مقادیر k نسبتاً با ثبات (افقی) باشد، مقادیری از k که باعث ایجاد چنین ثباتی شده‌اند، برآوردی منطقی از شاخص دنباله فراهم می‌آورد. این راه‌حل در تلاش است از تمامی داده‌ها بیشترین اطلاعات ممکن را استخراج نماید و البته راهی که انتخاب می‌کند غیررسمی و غیرمعمول است.

---

1. Hill estimator
2. small-sample properties
3. Hill plot



نمودار (۶-۲): نمودار هیل

این نمودار بر اساس یک نمونهٔ فرضی استخراج شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید نمودار در محدودهٔ «k»های ۳۰ تا ۴۵ تقریباً افقی است. بنابراین، برآوردکنندهٔ هیل در این محدوده نسبتاً پایدار است و مقدار آن (حدود ۰/۱۹) تخمینی از شاخص دنباله در اختیارمان قرار می‌دهد. برآوردکنندهٔ هیل تنها یکی از پارامترهای توزیع GEV یعنی شاخص دنباله را برآورد می‌کند. برای برآورد دیگر پارامترها می‌توانیم از روش حداکثر درست‌نمایی و یا رگرسیون استفاده کنیم.

انتخاب نمونهٔ ارزش‌های فرین

بدیهی است که برای برآورد پارامترهای ارزش‌های فرین باید نمونه‌ای از آن‌ها داشته باشیم. از آنجا که هر نمونه تنها یک ارزش فرین (حداقل یا حداکثر) دارد، برای تهیهٔ نمونه‌ای متشکل از n_e ارزش فرین باید n_e بار از توزیع ناشناختهٔ مادر نمونه‌گیری کنیم. در واقع هرکدام از ارزش‌های فرین با انتخاب نمونه‌ای به اندازهٔ n و استخراج بزرگترین یا کوچکترین مقدار نمونه حاصل می‌شود. بدیهی است که اندازهٔ تمامی نمونه‌ها برابر و مساوی n می‌باشد. با بزرگ‌ترشدن n می‌توان پارامترها را با دقت بیشتری برآورد کرد.

محاسبهٔ صدک‌های توزیع تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین

برای محاسبهٔ صدک‌های توزیـع GEV، سـمت چـپ رابطـهٔ (۶-۵) را برابـر p قـرار می‌دهیم. بدیهی است که p احتمال تجمعی توزیع GEV اسـت. سـپس از طـرفین رابطـه لگاریتم می‌گیریم. پس از انجام این عملیات خواهیم داشت:

$$\ln p = \begin{cases} -\left[1+\xi_{\max}\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)^{-1/\xi_{\max}}\right] & if \quad \xi_{\max} \neq 0 \\ -\exp\left[-\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right] & if \quad \xi_{\max} = 0 \end{cases} \quad (۶\text{-}۱۹)$$

سپس مقدار $x_{\max}$ را از آن خارج می‌کنیم:

$$x_{\max} = \begin{cases} \mu_{\max} - \left(\dfrac{\sigma_{\max}}{\xi_{\max}}\right)\left[1-\left(-\ln p\right)^{-\xi}\right] & if \ (Frechet, \xi > 0) \\ \mu_{\max} - \sigma_{\max}\left[\ln(-\ln p)\right] & if \ (Gumbel, \xi = 0) \end{cases} \quad (۶\text{-}۲۰)$$

مقدار حاصل، صدک توزیع GEV برای احتمال تجمعی p است.

مثال (۶-۱): صدک‌های گامبل

برای توزیع استاندارد گامبل ($\mu = 0, \sigma = 1$) صدک پنجم و نود و پنجم برابر است با:

$$-\ln\left[-\ln(0.05)\right] = -1.0972$$
$$-\ln\left[-\ln(0.095)\right] = 2.9702$$

مثال(۶-۲): صدک‌های فرچت

در توزیع استاندارد فرچت با $\xi_{\max} = 0.2$، صدک پنجم و نود و پنجم برابر است با:

$$-(1/0.2)\left[1-(-\ln(0.05)\right]^{-0.2} = -0.9851$$
$$-(1/0.2)\left[1-(-\ln(0.95)\right]^{-0.2} = 4.0564$$

با $\xi = 0.3$، صدک پنجم و نود و پنجم عبارت است از:

$$-(1/0.3)\left[1-(-\ln(0.05)\right]^{-0.3} = -0.9349$$
$$-(1/0.3)\left[1-(-\ln(0.95)\right]^{-0.3} = 4.7924$$

بنابراین صدک‌های توزیع فرچت نسبت به مقدار شاخص دنباله حساس است و با افزایش آن بزرگ‌تر می‌شود. هنگامی‌که $\xi_{\max} \to 0$، صدک‌های توزیع فرچت به صدک‌های متناظر در توزیع گامبل نزدیک می‌شوند.

محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک

محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک مستلزم استخراج صدک موردنظر از توزیع بازده یا توزیع زیان دارایی است. باید به خاطر داشته باشیم که روابط (۶-۱۹) و (۶-۲۰) مربوط به توزیع زیان حداکثر و یا توزیع بازدهٔ حداقل بوده و به توزیع زیان مادر یا توزیع بازدهٔ مادر (که ارزش‌های فرین از آن‌ها استخراج شده است) بازنمی‌گردد. به‌عنوان مثال صدک پنجم گویای بازدهی است که ۵٪ از کوچکترین بازده‌ها (بازده‌های فرین) کوچک‌تر یا مساوی آن است. این صدک در سمت چپ توزیع بازده‌های فرین قرار دارد.

برای این‌که بتوانیم صدک‌های مربوط به توزیع ارزش‌های فرین را به صدک‌های توزیع مادر منتقل کنیم، باید به‌گونه‌ای بین احتمالات این دو توزیع رابطه برقرار نماییم. به عبارتی دیگر، باید توزیع احتمال ارزش‌های فرین $X_{\max}$ را به توزیع احتمال متغیر مادر X مرتبط سازیم.

همان‌گونه که قبلاً گفتیم و بر اساس رابطهٔ (۶-۳)، توزیع دقیق حداکثرها را می‌توان به‌عنوان تابعی از توزیع مادر یعنی $F(x)$ و طول دورهٔ انتخابی یعنی n بیان نمود. این رابطه به‌صورت زیر است:

$$H_{\max,n}(x) = \left[F(x)\right]^n$$

که $H_{\max,n}(x)$ و $F(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{\max,n}(x) = \Pr\left\{X_{\max} \le x_{\max}\right\} = p \quad (۲۱-۶)$$
$$F(x) = \Pr\left\{X \le x_{\max}\right\} = 1-\alpha \quad (۲۲-۶)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$p=(1-\alpha)^{n} \qquad (۲۳-۶)$$

که n اندازهٔ نمونه‌هایی است که ارزش‌های فرین از آن‌ها استخراج شده‌اند. با جایگذاری رابطهٔ فوق در رابطهٔ (۶-۲۰) داریم:

$$x=\begin{cases} if\ (Frechet,\xi>0) \\ \mu_{\max}-\left(\dfrac{\sigma_{\max}}{\xi_{\max}}\right)\left[1-\left(-n\ln(1-\alpha)\right)^{-\xi_{\max}}\right] \\ \\ if\ (Gumbel,\xi=0) \\ \mu_{\max}-\sigma_{\max}\left[\ln\left(-n\ln(1-\alpha)\right)\right] \end{cases} \qquad (۲۴-۶)$$

بر اساس این رابطه، صدک توزیع بازدهٔ مادر در سطح اطمینان موردنظر محاسبه می‌شود. بنابراین، این صدک همان ارزش درمعرض‌ریسک درصدی است. برای محاسبهٔ VaR کافی است که حاصل‌ضرب این صدک و قیمت جاری دارایی را محاسبه نماییم:

$$VaR_t=P_{t-1}\times\%VaR_t \quad (۲۵-۶)$$

مثال (۶-۳): ارزش درمعرض‌ریسک فرچت و گامبل

فرض کنید پارامترهای مربوط به ارزش‌های فرین بازدهٔ یک سهم از توزیع فرچت با مشخصات $\mu_{\max}=2\%$، $\sigma_{\max}=0.7\%$ و $\xi_{\max}=0.3$ پیروی می‌کند. همچنین فرض کنید ارزش‌های فرین از نمونه‌هایی با اندازهٔ ۱۰۰ مشاهده حاصل شده‌اند. قیمت جاری این سهم ۱،۰۰۰ تومان است. ارزش درمعرض‌ریسک در سطح اطمینان ۹۹/۵٪ عبارت است از:

$$\begin{aligned} q_{99.5\%}(r)&=0.02-\left(\frac{0.007}{0.3}\right)\times\left[1-\left(-100\times\ln(0.995)\right)^{-0.03}\right] \\ &=0.02537 \\ VaR&=1000\times0.02537=253.7 \end{aligned}$$

و در سطح اطمینان ۹۹/۹٪ داریم:

$$q_{99.9\%}(r) = 0.02 - \left(\frac{0.007}{0.3}\right) \times \left[1 - \left(-100 \times \ln(0.999)\right)^{-0.03}\right]$$
$$= 0.04322$$
$$VaR = 1000 \times 0.04322 = 432.2$$

ارزش درمعرض‌ریسک را برای توزیع گامبل نیز محاسبه می‌کنیم. در سطح اطمینان ۹۹/۵٪ داریم:

$$q_{99.5\%}(r) = 2 - 0.007 \times \ln[-100 \times \ln(0.995)] = 0.02483$$
$$VaR = 1000 \times 0.02483 = 248.3$$

و در سطح اطمینان ۹۹/۹٪

$$q_{99.5\%}(r) = 2 - 0.007 \times \ln[-100 \times \ln(0.999)] = 0.03612$$
$$VaR = 1000 \times 0.03612 = 361.2$$

نتایج گویای بزرگ‌تربودن ارزش درمعرض‌ریسک فرچت نسبت به گامبل می‌باشد و این خود نشان‌دهندهٔ اهمیت انتخاب مقدار مناسب برای شاخص دنباله است.

اما، چگونه از بین توزیع گامبل و فرچت دست به انتخاب بزنیم؟ چندین راه وجود دارد که به ما در انتخاب توزیع مناسب ارزش‌های فرین یاری می‌رساند:

- اگر با اطمینان نسبی امکان شناسایی توزیع بازدهٔ مادر وجود دارد، می‌توان توزیع ارزش‌های فرین را در دامنه‌ای انتخاب کرد که با توزیع مادر هم‌خوانی داشته باشد. مثلاً، اگر اطمینان داریم که توزیع مادر t است، می‌توانیم توزیع فرچت را انتخاب کنیم، چراکه توزیع t در دامنهٔ جذب توزیع فرچت قرار دارد. به عبارت دیگر، ما توزیع ارزش‌های فرین را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم با ارزش‌های فرین توزیع مادر سازگار باشد.
- می‌توان معنی‌داربودن شاخص دنباله را آزمون کرد و در صورتی‌که شاخص دنباله به‌لحاظ آماری معنی‌دار نباشد، از توزیع گامبل و در غیر این صورت از توزیع فرچت استفاده کنیم. به هرحال همیشه این خطر وجود دارد که اشتباهاً مقدار شاخص دنباله

را صفر در نظر بگیریم و این خود باعث می‌شود که سنجه‌های ریسک فرین را کمتر از واقع برآورد کنیم.

- با توجه به خطرات ریسک مدل و در نظرگرفتن این موضوع کـه برآوردهـای سـنجهٔ ریسک با افزایش شاخص دنباله افزایش می‌یابد، همیشـه انتخـاب مطمئن‌تـر، توزیـع فرچت است.

رویکرد فراتر از آستانه[۱]

در این‌جا به بخش دوم ادبیات ارزش‌های فرین می‌پردازیم. این بخش با کاربرد نظریهٔ ارزش فرین برای توزیع زیان‌های فراتر از یک آستانه سـروکار دارد. رویکـردی کـه بـرای مطالعهٔ زیان‌های فراتر از آستانه به‌کار می‌گیریم، فراتر از آستانه یا توزیع تعمیم‌یافتـهٔ پرتـو[۲] می‌باشد که بر اساس قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین شکل گرفته است. این توزیع نسبت به توزیع تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین به پارامترهای کمتری نیاز دارد.

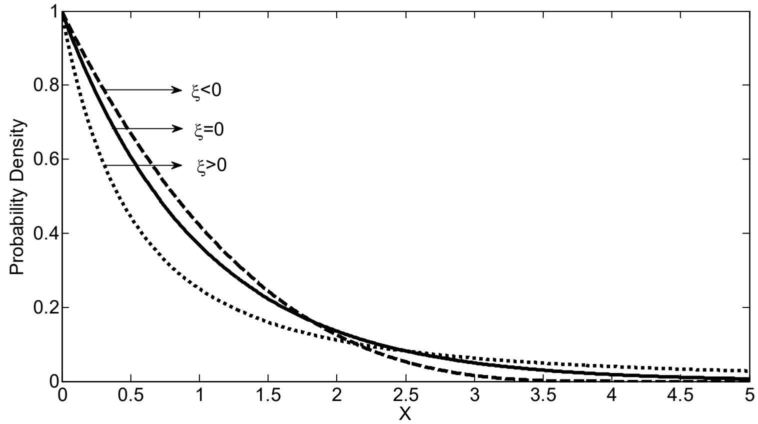
توزیع تعمیم‌یافتهٔ پرتو، طیف پیوسته‌ای از اشکال مختلف را پدید مـی‌آورد کـه توزیـع نمایی و پرتو دو نمونهٔ خاص از آن است. همانند توزیع تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین، این توزیـع نیز به ازای مقادیر مختلف شاخص دنباله، سه حالت خاص دارد:

- اگر $\xi_{\max} > 0$، توزیع تعمیم‌یافتهٔ پرتو دارای دنباله‌ای نسبتاً متراکم خواهد بود. در این حالت توزیع‌هایی مانند t در دامنهٔ جذب آن قرار می‌گیرد.
- اگر $\xi_{\max} = 0$، توزیع تعمیم‌یافتهٔ پرتو دارای دنباله‌ای با تراکم متوسط است. در ایـن حالت توزیع‌هایی مانند نرمال در دامنهٔ جذب آن قرار می‌گیرد.
- اگر $\xi_{\max} < 0$، توزیع تعمیم‌یافتهٔ پرتو دنباله‌ای نسـبتاً کم‌تـراکم دارد. در ایـن حالـت توزیع‌هایی مانند بتا در دامنهٔ جذب آن قرار می‌گیرد.

نمودار زیر، اشکال مختلف توزیع تعمیم‌یافتهٔ استانداردشدهٔ پرتو (پارامتر موقعیت برابـر صفر و پارامتر معیار برابر یک) را به ازای مقادیر مختلف شاخص دنباله به تصویر می‌کشد.

---

1. peak over threshold (POT)
2. generalized Pareto distribution (GPD)



نمودار (۶–۳): توزیع تعمیم‌یافتهٔ استانداردشدهٔ پرتو به ازای مقادیر مختلف شاخص دنباله

بر اساس نمودار (۶–۳) با کاهش مقادیر شاخص دنباله از مثبت به منفی از تراکم دنباله کاسته می‌شود و احتمال رخداد فرین کاهش می‌یابد.

همان‌گونه که نظریهٔ تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین راه‌حلی بدیهی برای مدل‌سازی حداکثرها و حداقل‌هاست، رویکرد فراتر از آستانه نیز روشی بدیهی برای مدل‌سازی تخطی‌ها از یک آستانهٔ بزرگ است. به‌عبارتی دیگر ما تنها به‌دنبال مشاهدات حداکثر یا حداقل نیستیم، بلکه تخطی مشاهدات فرین از یک آستانهٔ بزرگ نیز برایمان جالب توجه است. یک راه استخراج ارزش‌های فرین از یک نمونهٔ مشاهدات این است که تخطی‌ها از یک آستانهٔ بزرگ را به‌عنوان ارزش‌های فرین در نظر بگیریم. اگر نمونهٔ مشاهدات را با $X_1, X_2, \dots, X_n$ و تابع توزیع آن را با $F(x)$ و مقدار آستانه را با u نشان دهیم، $F(u)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(u) = \Pr\{X_i \le u\} \quad (۶\text{–}۲۶)$$

تخطی زمانی اتفاق می‌افتد که برای هر $i = 1,2,\dots,n$ داشته باشیم:

$$X_i > u \qquad (۶\text{–}۲۷)$$

بر این اساس، مقدار اضافی فراتر از آستانه را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y_i = X_i - u \qquad (۶\text{–}۲۸)$$

برای احتمالات $X_i \le y_i + u$ خواهیم داشت:

$$\Pr\{X_i \leq y_i + u\} = F(y_i + u) \quad (۲۹-۶)$$

به این ترتیب، برای توزیع احتمال مقادیر اضافی فراتر از آستانهٔ u خواهیم داشت:

$$F_u(y) = \Pr\{X_i - u \leq y_i \mid X_i > u\} \quad (۳۰-۶)$$

که $F_u(y)$ نمایان‌گر احتمال تخطی X حداکثر به اندازهٔ y از آستانهٔ u است، البته مشروط بر این‌که X از u فراتر رفته باشد. این احتمال مشروط را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$F_u(y) = \frac{\Pr\{X_i - u \leq y_i, X_i > u\}}{\Pr(X > u)} \quad (۳۱-۶)$$

که در نتیجه خواهیم داشت:

$$F_u(y) = \frac{F(y_i + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (۳۲-۶)$$

از آنجا که $F_u(y)$ احتمال مشروط بر تخطی از آستانه است، y_i تنها برای مقادیر بزرگ‌تر از صفر تعریف می‌شود و بدین ترتیب هر زمان که y_i مقدار می‌گیرد، تخطی روی داده است. می‌دانیم که برای هر $X > u$ داریم: $X = y + u$ بنابراین توزیع احتمال متغیر X را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$F(x) = [1 - F(u)]F_u(y) + F(u) \quad (۳۳-۶)$$

توجه داشته باشید که رابطهٔ فوق تنها برای $X > u$، صادق است.

بالکما و دی‌هان[1] و نیز پیکاندس[2] طی قضیه‌ای نشان دادند که برای«u»هایی که به اندازهٔ کافی بزرگ است، تابع توزیع مقادیر فراتر از آستانه را می‌توان با توزیع تعمیم‌یافتهٔ پرتو تقریب زد، چراکه با بزرگ‌شدن آستانه، توزیع ارزش‌های فراتر از آستانه یعنی $F_u(y)$

1. Balkema and de Haan (1974).
2. Pickands (1975).

به توزیع تعمیم‌یافتهٔ پرتو نزدیک می‌شود. توزیع تعمیم‌یافتهٔ پرتو را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x_{\max}) = \begin{cases} 1-\left[1+\xi\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]^{-1/\xi_{\max}} & if\ \xi \neq 0 \\ 1-\exp\left[-\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right] & if\ \xi = 0 \end{cases}$$

with (۶-۳۴)

$$x \in \begin{cases} [\mu_{\max}, \infty] & if\ \xi \geq 0 \\ \left[\mu_{\max}, \dfrac{\mu_{\max}-\sigma_{\max}}{\xi_{\max}}\right] & if\ \xi < 0 \end{cases}$$

بدیهی است که حد بخش اول رابطهٔ فوق به ازای $\xi_{\max} \to 0$، برابر است با رابطهٔ دوم. بر این اساس، می‌توان توزیع تعمیم‌یافتهٔ پرتو را تنها با رابطهٔ زیر نمایش داد:

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x_{\max}) = 1-\left[1+\xi_{\max}\left(\frac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]^{-1/\xi_{\max}} \quad (۶\text{-}۳۵)$$

رابطهٔ ساده‌ای بین GPD و GEV وجود دارد:

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x_{\max}) = 1+\log H_{\xi,\mu,\sigma}(x_{\max}) \quad if\ \log H_{\xi,\mu,\sigma}(x_{\max}) > -1 \quad (۶\text{-}۳۶)$$

اهمیت قضیهٔ بالکما، دی‌هان و پیکاندس در این است که می‌توان توزیع ارزش‌های فراتر از آستانه را با انتخاب شاخص دنباله و یک آستانهٔ بزرگ از طریق GPD تخمین زد.

توجه داشته باشید که در روابط (۶-۳۴) و (۶-۳۵)، $x_{\max}$ همان ارزش‌های فراتر از آستانه یا «X»های بزرگ‌تر از u است و $\mu_{\max}$ نیز معادل آستانه یا همان u است. بنابراین می‌توان رابطهٔ (۶-۳۴) را به این صورت بازنویسی کرد:

$$F(x)=\begin{cases}1-\left[1+\xi\left(\dfrac{x-u}{\sigma_{\max}}\right)\right]^{-1/\xi_{\max}} & if\ \xi\neq 0\\ 1-\exp\left[-\left(\dfrac{x-u}{\sigma_{\max}}\right)\right] & if\ \xi=0\end{cases}$$

with (۶-۳۷)

$$x\in\begin{cases}\left[u,\infty\right] & if\ \xi\geq 0\\ \left[u,\dfrac{u-\sigma_{\max}}{\xi_{\max}}\right] & if\ \xi<0\end{cases}$$

تحلیل داده‌ها پیش از برآورد[1]

برای تخمین پارامترها باید یک مقدار منطقی برای آستانهٔ u انتخاب کنیم. این آستانه تعیین‌کنندهٔ تعداد مشاهدات فراتر از آستانه یعنی n_u است. مبانی نظری ضعیفی برای انتخاب آستانه وجود دارد و این یکی از نقاط ضعف نظریهٔ فراتر از آستانه است. بدین ترتیب این انتخاب بیشتر به قضاوت‌های ما مربوط می‌شود. هرچند تخمین این پارامتر از طریق حداکثر درست‌نمایی طبیعی‌ترین راه به‌نظر می‌رسد، اما این رویکرد از ثبات برخوردار نیست. با تغییر آستانه، تعداد مشاهدات فراتر از آستانه تغییر می‌کند و این امر موجب ایجاد تابع احتمال ناپیوسته و اغلب نامحدود می‌شود. انتخاب آستانه مستلزم برقراری یک مصالحه بین بزرگی آستانه و تعداد مشاهدات فراتر از آستانه است. از طرفی آستانه باید به اندازهٔ کافی بزرگ باشد تا تقریب توزیع مشاهدات فراتر از آستانه بر اساس قضیهٔ توزیع تعمیم‌یافتهٔ پرتو از دقت بیشتری برخوردار باشد و از طرفی دیگر، انتخاب یک آستانهٔ بسیار بزرگ باعث می‌شود که تعداد کافی از مشاهدات فراتر از آستانه در اختیار نداشته باشیم و این امر قابلیت اتکای تخمین‌هایمان را زیر سؤال می‌برد. اگر بخواهیم به این گفته‌ها رنگ آماری بیشتری بدهیم باید بگوییم که تعیین آستانه مستلزم ایجاد تعادل بین تورش (اریب) و واریانس است. اگر آستانهٔ کوچکی را انتخاب کنیم، تعداد مشاهدات یا همان تعداد تخطی‌ها افزایش می‌یابد

1. preestimation data analysis

و برآورد از دقت بیشتری برخوردار می‌شود. به‌هرحال انتخاب یک آستانهٔ کوچک باعث معرفی برخی از مشاهدات مرکزی‌تر به مجموعه مشاهدات می‌گردد و به این ترتیب برآورد، اریب خواهد گردید.

هر چند که روش مشخص و تجویزشده‌ای برای انتخاب آستانه وجود ندارد ولی می‌توان با بررسی مشاهدات فرین و تجزیه و تحلیل دنباله‌ها به شیوهٔ قابل‌قبولی آستانه را انتخاب کرد. تجزیه و تحلیل داده‌ها همچنین رهنمودهای مناسبی را در جهت انتخاب مناسب شاخص دنباله فراهم می‌آورد. در این زمینه سه ابزار شناسایی دنباله وجود دارد که عبارتند از:

- نمودار صدک- صدک[1]
- تابع میانگین فزونی[2]
- نمودار هیل

به‌وسیلهٔ هرکدام از این ابزار می‌توان قسمتی از ویژگی‌های مشاهدات فرین را مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. آگاهی از رفتار دنباله‌ها ما را در انتخاب آستانه یاری می‌دهد.

نمودار صدک- صدک

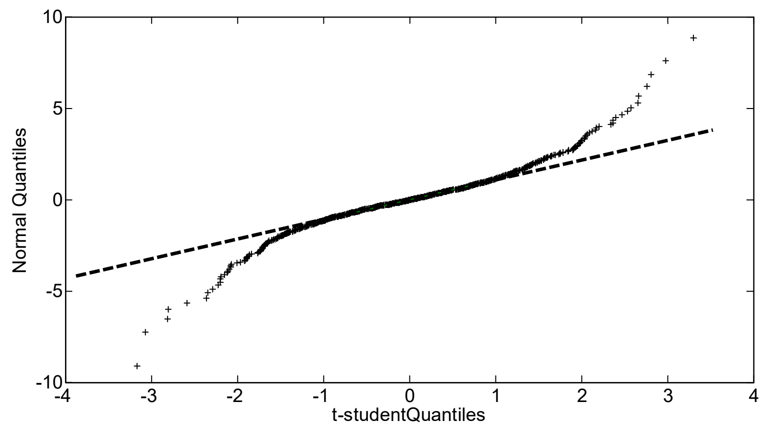
در تحلیل‌های آماری برای بررسی این‌که آیا یک نمونه از توزیع خاصی ناشی می‌شود، از نمودار صدک- صدک استفاده می‌کنند. این نمودار یک ابزار سادهٔ بصری است. برای استفاده از این ابزار، صدک‌های توزیع فرضی در مقابل صدک‌های توزیع تجربی ترسیم می‌شود و میزان همخوانی صدک‌های دو توزیع با هم مقایسه می‌شود. اگر توزیع نمونه از توزیع فرضی حاصل شده باشد، نمودار صدک- صدک خطی خواهد بود.

در زمینهٔ نظریهٔ ارزش فرین، عموماً نمودار صدک- صدکِ توزیع‌نمونه‌ها را در مقابل توزیع نمایی ترسیم می‌کنند و از آن‌جا که توزیع نمایی دارای دنباله‌هایی با تراکم متوسط است، تراکم دنبالهٔ سایر توزیع‌ها در مقایسه با آن سنجیده می‌شود. اگر داده‌ها دارای توزیع

---

1. quantile-quantile plot (Q-Q plot)
2. mean excess function (MEF)

نمایی باشد، نقاط مربوط به داده‌ها روی خطـی بـا شـیب مثبـت قـرار می‌گیرنـد. البتـه، در نظرگرفتن توزیع نمایی به‌عنوان توزیع معیار، یک انتخـاب اسـت و بـه‌جای آن می‌تـوان از توزیع‌های دیگر مانند نرمال نیز استفاده کرد. در نمودار (۶–۴)، نمودار صدک– صدک ارایه شده است. در این نمودار صدک‌های تابع توزیع تجربی (که در این‌جا توزیع t است) بر روی محور افقی و صدک‌های تابع توزیع نرمال بر روی محور عمودی ارایه شده است.



نمودار (۶–۴): نمودار صدک– صدک توزیع t در برابر توزیع نرمال

داده‌های نمودار فوق بوسیلهٔ مولد اعداد تصادفی نرمال و t تولید شده است. اگر داده‌ها از توزیع نرمال حاصل شده باشد، باید روی خط راست قرار گیرد. اگر توزیـع تجربـی دارای دنباله‌های سنگین‌تری باشد، منحنی در سمت چپ به‌سمت پایین و در سمت راست به‌سمت بالا خمیدگی پیدا می‌کند. بدیهی است که توزیع t نسبت به توزیع نرمال دارای دنبالـه‌های سنگین‌تری است و این امر در نمودار (۶–۴) کاملاً مشخص است.

تابع میانگین فزونی

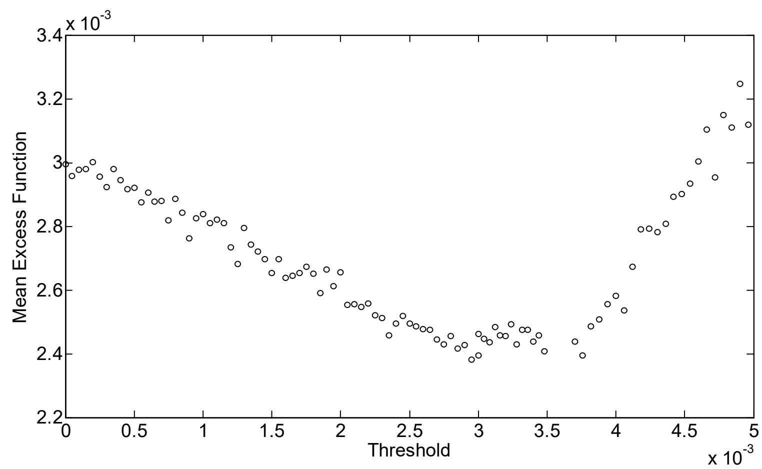
ابزار دیگری که برای بررسی دنباله‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد، تابع میانگین فزونـی نمونه است. این تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_{n_u}(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n_u}(X_i - u)}{\sum_{i=1}^{n_u} I_{(X_i > u)}} \quad (۳۸–۶)$$

که I تابع معرف است و زمانی که داده‌ها بزرگ‌تر از آستانه باشد یک می‌گیرد و در غیر این‌صورت صفر می‌شود. تابع میانگین فزونی برابر است با حاصل‌جمع فزونی‌های فراتر از آستانه (مقادیر اضافی فراتر از آستانه) تقسیم بر تعداد داده‌هایی که فراتر از آستانه است.

این تابع در واقع میزان دورافتادگی موردانتظار داده‌ها را به‌هنگام رخداد یک تخطی نشان می‌دهد. اگر تابع میانگین فزونی در بالای یک آستانهٔ خاص، خطی راست با شیب مثبت باشد، نشانگر این است که داده‌ها از توزیع تعمیم‌یافتهٔ پرتو با شاخص دنبالهٔ مثبت پیروی می‌کنند. از سوی دیگر، تابع میانگین فزونی داده‌هایی که دارای توزیع نمایی است، خطی افقی است و در نهایت این تابع برای داده‌هایی با دنباله‌های کم‌تراکم، خطی با شیب منفی است.

تابع میانگین فزونی کمک مؤثری در جهت انتخاب آستانه می‌کند. اگر این تابع را بر اساس تغییرات آستانه ترسیم کنیم، بهتر است آستانه را در جایی انتخاب کنیم که تابع میانگین فزونی پس از آن، خطی راست با شیب مثبت باشد. در نمودار(۶-۵) تابع میانگین فزونی بر اساس تغییرات آستانه برای نمونه‌ای از داده‌ها ارایه شده است.



نمودار (۶-۵): تابع میانگین فزونی بر اساس تغییرات آستانه برای داده‌های بورس تهران

توجه داشته باشید که نمودار پس از ۰/۳۷ درصد، تقریباً خطی با شیب مثبت است که وجود رفتار پرتو در دنباله را نوید می‌دهد.

نمودار هیل

ابزار دیگر جهت تعیین آستانه، نمودار هیل است. هیل برآوردکنندهٔ زیر را برای شاخص دنباله پیشنهاد می‌کند:[1]

$$\hat{\xi} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} \ln X_{i,n} - \ln X_{k,n} \quad for\; k \geq 2 \quad (۳۹-۶)$$

که k شمارهٔ بالاترین آمارهٔ ترتیبی است و یا به‌عبارت دیگر تعداد تخطی‌ها می‌باشد و n اندازهٔ نمونه است.

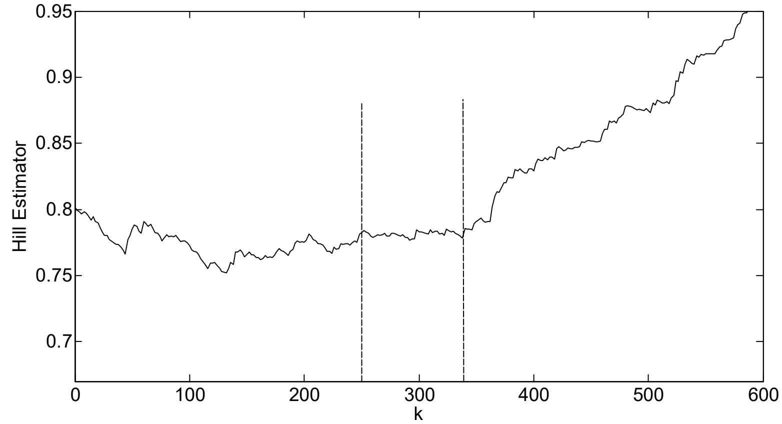
برای تعیین آستانه، نمودار هیل را ترسیم می‌کنیم، به‌گونه‌ای که شاخص دنبالهٔ تخمینی، تابعی از تعداد k بالاترین آمارهٔ ترتیبی باشد. آستانه را در جایی انتخاب می‌کنیم که شاخص دنباله نسبتاً ثابت باشد. به عبارتی دیگر، آستانه را در جایی انتخاب می‌کنیم که تابع میانگین فزونی، با ازای مقادیر k نسبتاً افقی می‌شود.

در نمودار (۶-۶)، نحوهٔ انتخاب آستانه برای داده‌های شاخص بورس تهران ارایه شده است. همان‌طور که از نمودار مشخص است، شاخص دنبالهٔ تخمینی در ناحیه‌ای بین ۲۵۰ تا ۳۳۰ نسبتاً ثابت است و در نتیجه k را عددی بین این دو عدد در نظر می‌گیریم. شاید این بازه برای برآورد شاخص دنباله اندکی بزرگ به‌نظر برسد، اما می‌توان از آن به‌عنوان نقطهٔ شروع استفاده کرد.

توجه داشته باشید که پارامتر موقعیت یعنی $\mu_{\max}$ همان آستانه است و با انتخاب u مشکل انتخاب این پارامتر مرتفع می‌گردد. به‌هنگام محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک این مسأله را بیشتر توضیح می‌دهیم.

---

1. Hill (1975).



نمودار (۶-۶): نمودار هیل و نحوهٔ انتخاب آستانه

برای انتخاب آستانه باید ترکیبی از ابزارهای مناسب مانند نمودار صدک- صدک، تابع میانگین فزونی و نمودار هیل را مد نظر قرار داد، در غیر این‌صورت ممکن است برآوردهایمان واریانس بالایی داشته و یا همراه با اریب باشد.

برآورد پارامترها

در ادامه کار باید پارامترهای $\xi_{\max}$ و $\sigma_{\max}$ را برآورد کنیم. این پارامترها را می‌توان با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی، روش رگرسیون و یا دیگر روش‌های مناسب تخمین زد. احتمالاً روش حداکثر درست‌نمایی نسبت به دیگر روش‌ها از قابلیت اتکای بیشتری برخوردار است. در ادامه، به تشریح این روش‌ها می‌پردازیم.

روش حداکثر درست‌نمایی

همان‌گونه که می‌دانیم، برای استفاده از این روش ابتدا باید تابع احتمال و یا لگاریتم احتمال را بنا کنیم. بدیهی است تابع احتمال از روی تابع چگالی احتمال حاصل می‌شود. تابع چگالی احتمال توزیع GPD برابر است با:

$$g_{\xi,\mu,\sigma}(G;x_{\max})=\left(\frac{1}{\sigma_{\max}}\right)\left[1+\xi_{\max}\left(\frac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]^{-\left(\frac{1+\xi_{\max}}{\xi_{\max}}\right)} \quad (۶-۴۰)$$

بدین ترتیب تابع لگاریتم احتمال نیز به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\ln L_h=\begin{cases} if\ \xi\neq 0 \\ -n_u\ln\sigma_{\max}-\left(\frac{1+\xi_{\max}}{\xi_{\max}}\right)\sum_{i=1}^{n_u}\ln\left[1+\xi_{\max}\left(\frac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right] \\ if\ \xi=0 \\ -n_u\ln\sigma_{\max}-\left(\frac{1}{\sigma_{\max}}\right)\sum_{i=1}^{n_u}(x_{\max}-\mu_{\max}) \end{cases} \quad (۶-۴۱)$$

برای تخمین پارامترها کافی است که تـابع لگـاریتم احتمـال GPD را بـا توجـه بـه محدودیت زیر حداکثر کنیم:

$$x\in\begin{cases}[\mu_{\max},\infty] & if\ \xi\geq 0 \\ \left[\mu_{\max},\frac{\mu_{\max}-\sigma_{\max}}{\xi_{\max}}\right] & if\ \xi<0\end{cases} \quad (۶-۴۲)$$

اگر $-0.5 < \xi$، برآوردکنندهای حاصل از روش حداکثر درسـت‌نمایی مجانبـاً نرمـال بوده و بنابراین از خصوصیت نسبتاً مناسبی برخوردار است.

روش رگرسیون

روش رگرسیون راه‌حل مناسبی جهـت تخمـین پارامترهـای توزیـع تعمیم‌یافتـهٔ پرتـو می‌باشد. این روش مشابه روش رگرسیون در تخمین پارامترهای GEV اسـت، بـه همـین دلیل از معرفی مجدد متغیرها خودداری می‌کنیم و تنها به نحوهٔ اجرای آن می‌پردازیم:

روش رگرسیون، تابع توزیع تجمعی مشاهدات مرتب‌شده را برابر میانگین نظری آن‌هـا قرار می‌دهد:

$$E\left[G_{\max,n}(\hat{x}_{\max,i})\right]=\begin{cases} if\ \xi\neq 0 \\ E\left[1-\left(1+\xi_{\max}\left(\dfrac{\hat{x}_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right)^{-1/\xi_{\max}}\right] \\ =\dfrac{n_u+i-1}{n_u+1} \\ \\ if\xi=0 \\ E\left[1-\exp\left[-\left(\dfrac{\hat{x}_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]\right] \\ =\dfrac{n_u+i-1}{n_u+1} \end{cases} \tag{۴۳-۶}$$

$$\Rightarrow G_{\max,n}(\hat{x}_{\max,i})\approx\frac{n_u+i-1}{n_u+1}$$

که $G_{\xi,\mu,\sigma}(\hat{x}_{\max,i})$ تـابع توزیـع تجمعـی ارزش‌هـای فراتـر از آسـتانه و n_u شـمار ارزش‌های فراتر از آستانه است. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 1-\left(1+\xi_{\max}\left(\dfrac{\hat{x}_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right)^{-1/\xi_{\max}}\approx\dfrac{n_u+i-1}{n_u+1} & if\ \xi\neq 0 \\ 1-\exp\left[-\left(\dfrac{\hat{x}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]\approx\dfrac{n_u+i-1}{n_e+1} & if\ \xi=0 \end{cases} \tag{۴۴-۶}$$

از رابطهٔ فوق دو بار لگاریتم می‌گیریم تا به شکل ساده‌تری تبدیل شود. سـپس جملـهٔ خطا را به سمت راست اضافه می‌کنیم تا رابطه به یک تسـاوی تبـدیل گـردد و در نهایـت پارامترها را از طریق کمینه‌کردن مجموع مجذورات خطا با اسـتفاده از معـادلات رگرسـیون غیرخطی برآورد می‌کنیم.

محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک

محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک مستلزم تخمین صدک‌های توزیع بازدهٔ دارایی است. این کار معادل محاسبهٔ صدک‌های توزیع بازدهٔ مادر است. تا این‌جا، فرآیند تخمین توزیع ارزش‌های فراتر از آستانه ارایه شد، به عبارتی دیگر، می‌توانیم توزیع بازده‌های کوچک‌تر از یک آستانهٔ کوچک و یا زیان‌های بزرگ‌تر از یک آستانهٔ بزرگ را تعیین کنیم. اما، چگونه می‌توان از طریق توزیع احتمال دنباله‌های متغیری تصادفی مانند بازده، توزیع بازدهٔ مادر را استخراج نمود و چگونه می‌توان صدک‌های توزیع بازده را استخراج کرد؟ و در نهایت، چگونه می‌توان ارزش درمعرض‌ریسک را محاسبه نمود؟

برای حل این مسأله باید به‌دنبال رابطه‌ای باشیم که نشان‌دهندهٔ نحوهٔ ارتباط توزیع بازده‌های فراتر از آستانه و توزیع بازدهٔ مادر است. این ویژگی در رابطهٔ (۶-۳۲) یافت می‌شود که عبارت است از:

$$F_u(y) = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

طبق قضیهٔ بالکما، دی‌هان و پیکاندس، $F_u(y)$ برای «u»هایی که به اندازهٔ کافی بزرگ است، به توزیع تعمیم‌یافتهٔ پرتو نزدیک می‌شود و نیز از آن‌جا که برای هر $X > u$ داریم: $X = u + y$، می‌توان نوشت:

$$F(x) = \left[1 - F(u)\right] G_{\xi,\mu,\sigma}(x-u) + F(u) \quad (۴۵\text{-}۶)$$

بعد از تعیین آستانه، مشاهدات فراتر از آستانه را از نمونهٔ مشاهدات جدا می‌کنیم. اگر تعداد مشاهدات فراتر از آستانه را با n_u و تعداد کل مشاهدات نمونه را با n نمایش دهیم. به‌راحتی می‌توانیم آخرین جملهٔ سمت راست رابطهٔ (۶-۴۵) را با برآوردکنندهٔ تجربی زیر تخمین بزنیم:

$$\hat{F}(u) = \frac{n - n_u}{n} \qquad (۴۶\text{-}۶)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۶-۴۶) در (۶-۴۵) می‌توان توزیع احتمال مقادیر x را برآورد کرد:

$$\hat{F}(x) = \left(1 - \frac{n - n_u}{n}\right) G_{\xi,\mu,\sigma}(x-u) + \frac{n-n_u}{n}$$
$$= \frac{n_u}{n} G_{\xi,\mu,\sigma}(x-u) + \frac{n-n_u}{n} \qquad (۶\text{–}۴۷)$$
$$= 1 + \frac{n_u}{n}\left[G_{\xi,\mu,\sigma}(x-u) - 1\right]$$

در نهایت، با جایگذاری رابطهٔ (۶–۳۵) در (۶–۴۷) خواهیم داشت:

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{n_u}{n}\left(1 + \hat{\xi}_{\max}\frac{x-u}{\hat{\sigma}_{\max}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}_{\max}}} \qquad (۶\text{–}۴۸)$$

می‌توانیم به جای $x-u$، معادل آن یعنی مقادیر اضافی فراتر از آستانه را جایگزین کنیم:

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{n_u}{n}\left(1 + \hat{\xi}_{\max}\frac{y}{\hat{\sigma}_{\max}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}_{\max}}} \qquad (۶\text{–}۴۹)$$

برای یک احتمال معین مثل $1-\alpha$، به‌راحتی می‌توان صدک مربوط به توزیع $\hat{F}(x)$ را برآورد نمود. بدیهی است که این کار با معکوس‌کردن توزیع $\hat{F}(x)$ امکان‌پذیر است:

$$\hat{F}^{-1}(1-\alpha) = u + \frac{\hat{\sigma}_{\max}}{\hat{\xi}_{\max}}\left(\left(\frac{n}{n_u}\alpha\right)^{-\hat{\xi}_{\max}} - 1\right) \qquad (۶\text{–}۵۰)$$

این رابطه در صورتی صحیح است که شرط زیر برآورده گردد:

$$1-\alpha > F(u) \qquad (۶\text{–}۵۱)$$

اگر داده‌های موردبررسی بازدهٔ دارایی باشد، رابطهٔ (۶–۵۰) همان ارزش درمعرض‌ریسک درصدی است. یعنی می‌توان نوشت:

$$\%VaR = u + \frac{\hat{\sigma}_{\max}}{\hat{\xi}_{\max}}\left(\left(\frac{n}{n_u}\alpha\right)^{-\hat{\xi}_{\max}} - 1\right) \quad (۶\text{-}۵۲)$$

مطابق رابطهٔ (۶-۲۵)،ارزش درمعرض‌ریسک از حاصل‌ضـرب ارزش درمعرض‌ریسـک درصدی در قیمت جاری دارایی به‌دست می‌آید.

ریزش موردانتظار درصدی نیز برابر است با:

$$\%ES = \frac{\%VaR}{1-\xi_{\max}} + \frac{\hat{\sigma}_{\max} - \hat{\xi}_{\max}u}{1-\xi_{\max}} \quad (۶\text{-}۵۳)$$

البته، این رابطه مشروط بر $\xi_{\max} < 1$ می‌باشد.

مثال۴-۶: سنجه‌های ریسک POT

فرض کنید برای بازده‌های روزانهٔ یک سهم، آسـتانه‌ای معـادل ۶٪ تعیـین کـرده‌ایم. قیمـت روز ایــن ســهم ۱۰۰ تومــان اســت و پارامترهــای تخمینــی، $\hat{\sigma}_{\max} = 0.05$ و $\hat{\xi}_{\max} = 0.5$ می‌باشد. اگر $n = 1000$ و $n_u = 50$ باشد، ارزش درمعرض‌ریسک یک‌روزه در سطح اطمینان ۹۹٪ برابر است با:

$$\%VaR = q_{0.01}(r) = 0.06 + \frac{0.05}{0.5}\left[\left(\frac{1000 \times 0.01}{50}\right)^{-0.5} - 1\right] = 0.184$$

$$VaR = 100 \times 0.184 = 18.4$$

و ES نیز در همین سطح اطمینان برابر است با:

$$\%ES = \frac{0.184}{1-0.5} + \frac{0.05 - 0.5 \times 0.06}{1-0.5} = 0.408$$

$$ES = 100 \times 0.408 = 40.8$$

نظریهٔ تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین در مقابل فراتر از آستانه

هر دو رویکرد GEV و POT نسخه‌های مختلفی از یک نظریهٔ زیربنایی به‌نام نظریهٔ ارزش فرین است. رویکرد اول، پوشش‌دهندهٔ توزیع ارزش‌های فرین است و رویکرد دوم، با توزیع تخطی‌های فراتر از یک آستانهٔ بزرگ سروکار دارد. بنابراین به‌لحاظ نظری اختلاف زیادی بین آن‌ها نیست، اما در عمل ممکن است بنا به دلایلی که ارایه می‌کنیم، یکی بر دیگری رجحان یابد:

در یک موقعیت خاص انتخاب یکی از رویکردها ممکن است از توجیه بیشتری برخوردار باشد. مثلاً، ممکن است با محدودیت داده مواجه باشیم و انتخاب یک رویکرد بر دیگری ترجیح داشته باشد. رویکرد GEV نسبت به POT دارای یک پارامتر اضافی است. هم‌چنین رویکرد GEV ممکن است باعث از دست‌رفتن بخشی از اطلاعات مفید گردد، چراکه ممکن است برخی از نمونه‌ها (بلوک‌ها) بیش از یک ارزش فرین داشته باشد. این دو مورد از معایب GEV نسبت به POT است. از طرف دیگر، POT مستلزم انتخاب آستانه است و این مسأله در GEV وجود ندارد.

در نهایت باید بگوییم که هر دو رویکرد GEV و POT از مبانی نظری محکمی برخوردارند و به همین دلیل معقول و منطقی‌اند، ولی به هر حال باید رویکردی را انتخاب نمود که با مسأله پیش روی مناسبت بیشتری داشته باشد.

تکامل رویکردهای ارزش فرین

در بخش‌های قبل در مورد اصول اساسی نظریهٔ ارزش فرین شرح مفصلی ارایه گردید. در این بخش به موقعیت‌های نسبتاً پیچیده‌تری می‌پردازیم؛ در هرکدام از این موقعیت‌ها برخی مفروضاتی نقض می‌گردد که قبلاً به‌طور صریح و یا تلویحی در نظر گرفته می‌شد. این موقعیت‌ها شامل ارزش فرین شرطی، داده‌های وابسته (و یا مشاهداتی که به‌طور مستقل و یکسان توزیع نشده‌اند) و نظریهٔ ارزش فرین چندمتغیره است. در بخش‌های بعدی به تشریح مختصر هرکدام از این موقعیت‌ها می‌پردازیم.

ارزش فرین شرطی[1]

رویه‌هایی که در مورد نظریهٔ ارزش فرین تشریح نمودیم، تماماً غیرشرطی است؛ بدین معنی که بدون هیچ‌گونه تعدیلی نسبت به متغیر تصادفی موردنظر (مثلاً X) مستقیماً بـه‌کار گرفته می‌شود. کاربرد نظریهٔ ارزش فرین غیرشرطی برای پیش‌بینی ارزش درمعرض‌ریسک و یا زیان منتظره در طی یک دورهٔ بلندمدت مفید است. اما، گاهی اوقـات خواهـان کـاربرد نظریهٔ ارزش فرین شرطی برای برخی ساختارهای پویا هستیم و این مستلزم تمایز بین X و عوامل تصادفی محرک آن است. استفاده از نظریهٔ ارزش فرینِ شرطی یا پویا زمـانی مفیـد است که با دوره‌های کوتاه‌مدت سروکار داشته باشیم و در عـین حـال، X دارای سـاختاری پویا و قابل‌مدل‌سازی باشد. برای مثال اگر بتوان متغیر تصادفی را با یک فرآیند $GARCH$ مدل‌سازی کرد، فرصت خوبی برای استفاده از نظریهٔ ارزش فرینِ شرطی ایجاد می‌شود. در این حالت ما به‌دنبال این هستیم که با اسـتفاده از فرآینـد $GARCH$، تلاطم‌هـای متغیـر تصادفی را تشریح کرده و سپس از نظریهٔ ارزش فرین برای مدل‌سازی خطاهای حاصـل از فرآیند $GARCH$ استفاده کنیم. برای این کار مک‌نیل و فرِی فرآیند دو مرحلـه‌ای زیـر را پیشنهاد کردند:[2]

- از یک مدل $GARCH$ جهت پیش‌بینی تلاطم‌های بازده استفاده می‌کنیم و پـس از تخمین پارامترهای مدل، خطاها را استخراج می‌کنیم. بدیهی است که این خطاهـا بـا کم‌کردن بازدهٔ موردانتظار از بازدهٔ واقعی حاصـل می‌شـود و بـازدهٔ موردانتظـار نیـز از طریق مدل شکل‌گیری بازدهٔ قیمت‌ها حاصل می‌شود. انتظار بر ایـن اسـت کـه ایـن خطاها دارای توزیع‌های یکسان و مستقل از هم باشند. در انتهای این مرحله از تلاطم و بازدهٔ موردانتظار آتی یعنی σ_{t+1} و μ_{t+1} تخمین‌هایی در دست داریم.
- نظریهٔ ارزش فرین را برای خطاهای استانداردشده به‌کار می‌گیریم و بدین ترتیـب بـا احتساب ساختاری پویا (یعنی $GARCH$) و نیز بـا کـاربرد EVT بـرای باقیمانـده‌ها تخمین‌هایی از VaR به‌دست می‌آوریم.

---

1. conditional extreme value
2. McNeil and Frey (2000).

عدم‌وجود استقلال زمانی

تاکنون چنین فرض می‌شد که فرآیندهای تصادفی محرک داده‌ها به‌طور یکسان و مستقل از هم توزیع شده‌اند، اما تحقیقات نشان داده که اغلب داده‌های مالی به‌نوعی وابستگی زمانی از خود نشان می‌دهد. این وابستگی زمانی معمولاً به شکل خوشه ظاهر می‌گردد. بدین معنی که مشاهدات کوچک و بزرگ با هم تشکیل خوشه می‌دهند. تشکیل خوشه بنا به دلایل زیر حائز اهمیت است:

- تشکیل خوشه، فرض توزیع یکسان و مستقل داده‌ها را دستخوش تهدید می‌کند و شرایط آماری آن مشخص نخواهد بود.
- بدیهی است که وابستگی داده‌ها می‌تواند باعث عملکرد بسیار ضعیف برآوردکننده گردد.
- تشکیل خوشه تعبیر نتایج را دگرگون می‌سازد. مثلاً، ممکن است بگوییم که به‌طور متوسط مشاهدات در هر صد مورد بیش از ۵ بار از صدک خاصی فراتر نخواهد رفت. اگر داده‌ها تشکیل خوشه دهد، تعداد تخطی‌های موردانتظار در یک دورهٔ زمانی معین مشخص نخواهد بود و تعداد تخطی‌ها بستگی به تمایل داده‌ها برای تشکیل خوشه دارد. بنابراین تشکیل خوشه اثر مهمی بر نحوهٔ تعبیر داده‌ها دارد.

دو راه ساده برای برخورد با وابستگی زمانی داده‌ها وجود دارد. شاید متداول‌ترین و ساده‌ترین روش، استفاده از توزیع‌های GEV برای حداکثرهای بلوک[1] باشد. این روش نقطه‌ای را استخراج می‌کند که داده‌های حداکثر، نسبت به داده‌های اصلی که از آن حاصل شده است، کمتر تشکیل خوشه دهد؛ با بزرگ‌ترشدن دوره‌هایی که این داده‌های حداکثر از آن‌ها استخراج می‌شود، خوشه‌های کمتری ایجاد می‌گردد. استفاده از رویکرد حداکثرهای بلوک بسیار ساده است، اما بخشی از کارایی آن به‌دلیل بیرون‌ریختن مشاهدات حداکثری که جزء حداکثرهای بلوک نیست، از بین می‌رود. مشکل دیگر این‌که هیچ رهنمودی راجع به طول دوره‌های هر بلوک وجود ندارد و این به مسأله عرض بند منجر می‌شود که قابل‌مقایسه با مسأله نحوهٔ انتخاب k است.

1. block maxima

راه‌حل دوم، برآورد دنبالهٔ توزیع شرطی نسبت به توزیع غیرشرطی است. بـرای انجـام این کار ابتدا باید مدل تلاطم شرطی را مثلاً بر اساس فرآینـد $GARCH$ بـرآورد کنـیم و سپس شاخص دنبالهٔ مربوط به باقیمانده‌های استانداردشدهٔ شرطی را تخمین بـزنیم. بـدین ترتیب وابستگی زمانی داده‌ها از طریق بخش قطعی مدل جمع‌آوری می‌شود و می‌تـوان بـا فرآیند تصادفی به‌صورت مستقل رفتار کرد. ایـن راه‌حـل همـان روش پیشـنهادی فـرِی و مک‌نیل است.

نظریهٔ ارزش فرین چندمتغیره[1]

تا به حال با نظریهٔ ارزش فرین تـک‌متغیره[2] مواجـه بـودیم، امـا نظریـهٔ ارزش فـرین چندمتغیره نیز وجود دارد که از آن می‌توان برای مدل‌سازی دنباله‌های توزیع‌های چندمتغیره استفاده کرد. در این‌جا موضوع اصلی، مدل‌سازی ساختار وابستگی ارزش‌های فـرین اسـت. برای درک این موضوع باید دوبـاره تمـایز نظریـهٔ ارزش فـرین را از نظریـهٔ آشـنای ارزش مرکزی مورد توجه قرار دهیم. همان‌گونه که می‌دانیم وقتی با ارزش‌های مرکـزی سـروکار داریم، برای تحقق مفروضات توزیع نرمال (یا به‌طور گسترده‌تر توزیـع بیضـوی) اغلـب بـر قضیهٔ حد مرکزی اتکا می‌کنیم. با داشـتن چنـین تـوزیعی، سـاختار وابسـتگی‌ها از طریـق همبستگی‌های میان متغیرهای مختلف به‌دست می‌آید. در این حالت بر اسـاس مفروضـات توزیعی، دانستن واریانس‌ها و همبستگی‌ها برای تعیین توزیع چنـدمتغیره کـافی اسـت. بـه همین دلیل است که همبستگی‌ها در نظریهٔ ارزش مرکزی از اهمیت بالایی برخوردارند.

این منطق در مورد ارزش‌های فرین کارایی ندارد. وقتی که ورای توزیع‌هـای بیضـوی می‌رویم، دیگر همبستگی بـرای تشـریح سـاختار وابسـتگی کفایـت نمی‌کنـد. در عـوض، مدل‌سازی ارزش‌های فرین چندمتغیره ما را ملزم به استفاده از نظریـهٔ مفصـل‌ها[3] می‌کنـد. $MEVT$ به ما می‌گوید توزیع محدود مربوط به ارزش‌های فـرین چنـدمتغیره[4]، عضـوی از

1. multivariate EVT (MEVT)
2. univariate EVT
3. copulas theory
4. limiting distribution of multivariate extreme values

خانوادهٔ مفصل‌های ارزش فرین[1] خواهد بود. به لحاظ نظری، ابعاد این مفصل‌ها بنا به خواستهٔ ما تعیین می‌شود؛ این ابعاد منعکس‌کنندهٔ تعداد متغیر تصادفی موردملاحظه است. به هر حال در رابطه با ابعاد، مسأله‌ای وجود دارد. اگر دو متغیر مستقل داشته باشیم و رویدادهای فرین تک‌متغیره را به‌گونه‌ای طبقه‌بندی کنیم که در هر ۱۰۰ مشاهده یک بار حادث شود، انتظار داریم که احتمال وقوع رویدادهای فرین برای دو متغیر تنها یک در ۱۰۰۰۰ مشاهده و برای سه متغیر یک در ۱۰۰۰۰۰۰ مشاهده باشد. بدین ترتیب با افزایش بعد، رویدادهای فرین چندمتغیره با سرعت زیادی کمیاب می‌شوند. بر این اساس، مشاهدات فرین چندمتغیرهٔ کمی در اختیار خواهیم داشت و این در حالی است که تعداد پارامترهای برآوردی افزایش خواهد یافت. بدین ترتیب در رابطه با تعداد بعد با محدودیت مواجهیم.

شاید از مثال فوق نتیجه بگیریم که رویدادهای فرین چندمتغیره نادرتر از آن است که نگران آن‌ها باشیم. اما، این یک اشتباه بزرگ است، چراکه به لحاظ نظری، احتمال وقوع رویدادهای فرین چندمتغیره به توزیع مشترک آن‌ها بستگی دارد و این حوادث را نمی‌توان مستقل از یکدیگر فرض کرد. وابستگی رویدادهای فرین به‌عنوان یک واقعیت تجربی نیز پذیرفته شده است. به‌عنوان مثال یک زمین‌لرزهٔ بزرگ می‌تواند محرک بلایای طبیعی یا مالی باشد. همگی می‌دانید که فجایع اغلب به هم وابسته اند. بنابراین آگاهی از ریسک‌های فرین چندمتغیره برای مدیران ریسک از اهمیت در خور توجهی برخوردار است.

نتیجه‌گیری

نظریهٔ ارزش فرین رویکردی است که برای تخمین احتمالات و صدک‌های رویدادهای فرین طراحی شده است. این رویکرد در مورد چگونگی تخمین‌ها، رهنمودی عملی فراهم می‌آورد و نتایج حاصل از کاربرد آن از دقت قابل‌ملاحظه‌ای برخودار است. بنابراین، روشی ایده‌آل و تخصصی جهت برآورد سنجه‌های ریسک فرین است.

نظریهٔ ارزش فرین هم‌چنین از این جهت حائز اهمیت است که ما را از آنچه که نباید انجام دهیم، آگاه می‌کند و مهم‌ترین راهنمایی‌ای که در این رابطه ارایه می‌کند، این است که برای برآورد ارزش‌های فرین از توزیع‌هایی استفاده نکنیم که توسط قضیهٔ حد مرکزی

1. extreme value copulas

توجیه می‌شود. این نظریه به ما می‌گوید که برای برآورد ریسک ارزش‌های فرین به جـای استفاده از توزیع‌های دلخواه از توزیع‌های پیشنهادی EVT استفاده کنیم. با این وجود، نباید از محدودیت‌های این رویکرد غافل شد. برخی از این محدودیت‌ها عبارت است از:

- مسائل مربوط به ارزش‌های فرین ذاتاً مشکل است، چراکه طبق تعریف، همیشه تعداد نسبتاً کمی از مشاهدات فرین در اختیار داریم. نتیجهٔ کمبود مشاهدات این اسـت کـه برآوردهای ارزش فرین نسبت بـه صـدک‌ها یـا احتمـالات مرکزی‌تـر توزیـع بسـیار نامطمئن است و متعاقباً فواصل اطمینان نسبتاً پهنی دارد. این ناشـی از نقـص EVT نیست، بلکه پیامد اجتناب‌ناپذیر کمبود داده‌هاست.
- برآوردهای ارزش فرین به‌طرز قابل‌ملاحظه‌ای در معرض ریسک مدل قـرار دارد. مـا باید جهت ارایهٔ تخمین‌هایی از ارزش‌های فرین، مفروضات مختلفی را در نظر بگیریم و این در حالی است که در عمل، تأیید صحت این مفروضات مشکل است. در نتیجه، نتایج حاصله نسبت به دقت مفروضات حساسیت زیادی از خود نشان می‌دهـد. EVT هم‌چنین ما را ملزم به اخذ تصمیماتی راجع به تعیین مقدار آستانه می‌کند و اخـذ ایـن تصمیمات چندان ساده نیست. بر این اساس، می‌توان گفت کـاربرد روش‌هـای ارزش فرین مستلزم قضاوت‌های ذهنی فراوانی است. به‌خاطر عـدم‌اطمینان موجـود در ایـن روش‌ها، بسیار مهم است که در این رویکرد، برآوردی از فواصل اطمینان سـنجه‌های ریسک به‌عمل آورده و نتایج را در معرض آزمون‌های استرس (فشار) قرار دهیم.
- از آنجا که تعداد بسیار کمی داده در اختیار داریم و نظریهٔ ارزش فرین نیز مجانباً خوب عمل می‌کند، تخمین‌ها نسبت به اثرات نمونهٔ کوچک یعنی اریب‌ها، غیرخطی‌بودن[1] و دیگر مسائل نامطلوب بسیار حساس است.

در نهایت اذعان می‌داریم که با آگاهی از کمبـود داده‌هـا کـه بـه‌طور اجتناب‌ناپـذیری قابلیت اتکای نتایج را محدود می‌کند، باید بهترین استفاده را از این نظریه به‌عمل بیاوریم.

به‌عنوان حسن ختام دو نقل قول از صاحب‌نظران EVT ارایه می‌کنیم:

مک نیل که در این زمینه پیشتاز است، می‌گوید:

1. non-linearity

ما با دنباله‌ها کار می‌کنیم و این در حالی است که تنها تعداد محدودی داده در اختیار داریم. عدم‌اطمینان تحلیل‌هایمان اغلب بالاست و این موضوع در فواصل اطمینان پهن ظاهر می‌شود. ... به هر حال اگر به‌دنبال کمّی‌سازی حوادث نادر هستیم، می‌توانیم به جای استفاده از رویکردهای فاقد عمومیت، بهترین استفاده را از EVT به عمل بیاوریم. نظریهٔ ارزش فرین بهترین تخمین را از رویدادهای فرین به‌دست می‌دهد. این نظریه نمایندهٔ درست‌ترین رویکردها برای اندازه‌گیری عدم‌اطمینان موجود در رویدادهای فرین است.[۱]

هم‌چنین دیبولد و همکارانش در مقاله‌ای که در سال ۲۰۰۰ انتشار یافت، می‌نویسند:

بهترین استفاده از EVT در مدیریت ریسک مالی زمانی حاصل می‌شود که علاوه بر نقاط قوت از محدودیت‌های آن نیز آگاه باشیم. با روشن‌شدن ابهامات، EVT به نظریه‌ای مفید و اساسی بدل خواهد شد. EVT به ما در جهت رسم منحنی‌های هموار از میان دنباله‌های فرین توابع تجربی کمک می‌کند. ... ولی نباید از آن بیشتر از آنچه که هست، انتظار داشته باشیم.[۲]

1. McNeil (1998), p. 18.
2. Diebold et al. (2000), p. 34.

منابع

1. Bali, T.G. (2003), "An extreme value theory to estimating volatility and value at risk," *Journal of Business*, Vol. 76, pp. 83-108.
2. Balkema, A. A. and de Hann, L. (1974), "Residual life time at great age," *The annals of probability*, Vol. 2, pp. 792-804.
3. Bensalah, Y. (2000), *Steps in Applying Extreme Value Theory to Finance: A Review*, Bank of Canada.
4. Bystorm, H. N. E. (2005), "Extreme value theory and extremely large electricity price changes," *Journal of international Review of Economic and Finance*, Vol. 14, pp. 41-55.
5. Diebold, F. X., Schuermann, T. and Stroughair, J. D. (2000), "Pitfalls and the opportunities in the use of extreme value theory in risk management," *Journal of Risk Finance*, Vol. 1, pp. 30-35.
6. Dowd, K (2005), *Measuring Market Risk*, John Wiley & Sons Ltd, Second Edition.
7. Gencay, R. and Selcuk, F. (2004), "Extreme value theory and value-at-risk: relative performance in emerging markets," *Journal of Forecasting*, Vol. 20, pp. 287-303.
8. Gencay, R. and Selcuk, F. (2006), "Overnight borrowing interest rates and extreme value theory," *Journal of European Economic Review*, Vol. 50, pp. 547-563.
9. Gencay, R. Selcuk, F., and Ulugulyagci, A. (2003), "High volatility, thick tails and extreme value theory in Value-at-Risk estimation," *Journal of Mathematics and Economics*, Vol. 33, pp. 337-356.
10. Gumbel, E. J. (1958), *Statistics of Extremes*, New York: Columbia University Press.

11. Hill, B. M. (1975), "A simple general approach to inference about the tail of a distribution," *The Annals of Statistics*, Vol. 3, pp. 1163–1174.
12. McNeil, A. J. (1998), "Calculating quartile risk measures for financial return series using extreme value theory," *ETHZ Zentruman*, Zurich.
13. McNeil, A. J. and Frey, R (2000), " Estimation of tail-related risk measures for hetroskedastisic financial time series: an extreme value approach" *Journal of Empirical Finance*, Vol. 7. pp. 271-300.
14. Neftic, S. N. (2000), "Value at risk calculations, extreme events and tail estimation," *Journal of Derivatives*, Vol. 7, pp. 23-38.
15. Pickands, J. (1975), "Statistical inference using extreme order statistics," *The annals of statistics*, Vol. 3, pp. 119-131.

فصل هفتم

رویکردهای ناپارامتریک

مقدمه

در فصل‌های پنجم و ششـم، رویکردهـای پارامتریـک مدل‌سـازی ریسـک را از نظـر گذراندیم. در این فصل به بررسی رویکردهـای ناپارامتریـک تخمـین سـنجه‌های ریسـک می‌پردازیم. این رویکردها بر مبنای آمار ناپارامتریک است. ویژگی‌های منحصر به فرد آمـار ناپارامتریک ما را به تشریح رویکردهای ناپارامتریک مدل‌سازی ریسک در فصـلی جداگانـه رهنمون گردید.

مشخصه‌ها و مفروضات

این رویکردها هیچ فـرض خاصـی را بـر توزیـع بـازدۀ دارایی‌هـا تحمیـل نمی‌کنـد و حتی‌الامکان به داده‌ها اجازه می‌دهد در مورد خود اظهار نظر کنند. رویکردهای ناپارامتریک از آخرین توزیع تجربی بازده و نه یک توزیع نظری، برای برآورد سنجه‌های ریسـک بهـره می‌گیرند. تمامی رویکردهای ناپارامتریک بـر اسـاس ایـن فـرض زیربنـایی قـرار دارد کـه می‌گوید: آیندۀ نزدیک تا اندازۀ زیادی شـبیه گذشـتۀ نزدیـک اسـت. بنـابراین می‌تـوان از اطلاعات مربوط به گذشتۀ نزدیک برای پیش‌بینی ریسک آیندۀ نزدیک استفاده کرد. بدیهی است که این فرض بـا توجـه بـه شـرایط ممکـن اسـت معتبـر و یـا نـامعتبر باشـد. بـرای تصمیم‌گیری در مورد استفاده از رویکردهای ناپارامتریک، باید در مورد این‌که احتمالاً تا چه

اندازه داده‌های مربوط به گذشتهٔ نزدیک، راهنمای خوبی برای ریسک‌های پیش رو در افق زمانی آینده است، قضاوتی به‌عمل آورد. رویکردهای ناپارامتریک نسبت به پارامتریک از تنوع کمتری برخوردار است.

همهٔ رویکردهای ناپارامتریک بر اساس شبیه‌سازی داده‌های تاریخی است. این شبیه‌سازی به روش‌های گوناگونی صورت می‌گیرد که هرکدام از این روش‌ها مشخص‌کنندهٔ رویکرد مربوطه است. در ادامه، پس از تشریح نحوهٔ جمع‌آوری داده‌های شبیه‌سازی تاریخی، به بررسی رویکردهای مختلف ناپارامتریک یا همان رویکردهای شبیه‌سازی تاریخی می‌پردازیم.

شبیه‌سازی داده‌های تاریخی

اولین کاری که باید انجام شود، جمع‌آوری یک سری مناسب از بازدهٔ سبد دارایی است. این بازده بر اساس دوره‌های زمانی خاص (مثلاً، یک‌روزه) اندازه‌گیری می‌شود. فرض کنید یک سبد با n دارایی داریم و برای هر دارایی در هر دورهٔ زمانی یک بازده موجود است. اگر r_{it} بازدهٔ سهم i در دورهٔ t باشد و w_i را به‌عنوان نسبت سرمایه‌گذاری در هر دارایی درنظر بگیریم، بازدهٔ تاریخی شبیه‌سازی‌شدهٔ سبد دارایی در دورهٔ t به‌صورت زیر خواهد بود:

$$r_{pt} = \sum_{i=1}^{n} w_i \, r_{it} \qquad (۱-۷)$$

معادلهٔ فوق، سری زمانی بازدهٔ شبیه‌سازی‌شدهٔ تاریخی را برای سبد دارایی تولید می‌کند و این سری زمانی، مبنای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک می‌باشد. این سری عموماً همانند توزیع‌های واقعی حاصل از سبد دارایی نیست، چراکه ترکیب سبد در طی زمان ممکن است دستخوش تغییر گردد. سری بازدهٔ شبیه‌سازی‌شدهٔ تاریخی شامل بازده‌هایی است که در صورت حفظ سبد کنونی خود در طی دورهٔ نمونهٔ تاریخی به‌دست خواهیم آورد.

با استفاده از رویکرد شبیه‌سازی تاریخی، بازدهٔ آتی اقسام دارایی‌ها در یک بازدهٔ تاریخی خلاصه می‌گردد. رابطهٔ (۷-۱) اذعان می‌کند که در رویکردهای ناپارامتریک برخلاف برخی رویکردهای پارامتریک، حل مسائل چندبعدی و شامل دارایی‌های ناهمگون، بسیار ساده است. در این رویکردها هیچ مشکلی در رابطه با ماتریس‌های واریانس–

کوواریانس و مانند آن وجود ندارد. بر این اساس، روش‌های ناپارامتریک، اغلب عادی‌ترین انتخاب برای مسائلی با ابعاد بزرگ است.

برخی از مهم‌ترین رویکردهای ناپارامتریک یا همان رویکردهای شبیه‌سازی تاریخی عبارتند از:

- شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی
- شبیه‌سازی تاریخی بوت‌استرپ
- شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با زمان
- شبیه‌سازی تاریخی با استفاده از تخمین چگالی ناپارامتریک

اکنون به بررسی هرکدام از این رویکردها می‌پردازیم.

شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی[۱]

در این روش، مستقیماً از داده‌های شبیه‌سازی تاریخی برای برآورد ریسک استفاده می‌شود و هیچ تعدیلی روی این داده‌ها صورت نمی‌گیرد. برای برآورد ارزش درمعرض‌ریسک کافی است که صدک آلفای توزیع بازده را استخراج کنیم. برای این کار ابتدا سری بازده را از کوچک به بزرگ مرتب و جایگاه صدک موردنظر را مشخص می‌کنیم. اگر سری شبیه‌سازی تاریخی شامل n بازده باشد، جایگاه صدک آلفا از طریق رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$n_\alpha = \frac{An}{100} + \frac{1}{2} \qquad (۲-۷)$$

در این رابطه، $A = 100\alpha$ و n_α جایگاه صدک α است.

با شمارش از پایین‌ترین بازده به جایگاه موردنظر می‌رسیم. بازدهٔ متناظر با این جایگاه، صدک آلفای بازده یعنی $q_r(\alpha)$ است. $\%VaR$ در سطح اطمینان $1-\alpha$ برابر است با:

1. basic historical simulation

$$\%VaR = -q_r(\alpha) \quad (۳-۷)$$

برای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک در هر دوره کافی است که حاصل‌ضرب $\%VaR$ و قیمت سبد دارایی در دورهٔ قبل (زمان صفر) را محاسبه کنیم.

$$VaR_t = P_{t-1} \times \%VaR_t \quad (۴-۷)$$

مثال (۷-۱): برآورد VaR با رویکرد شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی

فرض کنید سری بازدهٔ ماهانهٔ حاصل از یک سبد دارایی برای ۲۰ ماه گذشته به شرح جدول زیر است. ترکیب این سبد دارایی طی ۲۰ ماه گذشته ثابت بوده است. ارزش جاری سبد نیز ۱،۰۰۰ تومان است.

شماره	بازده	شماره	بازده	شماره	بازده	شماره	بازده
۱	-۱۰/۰	۶	-۲/۰	۱۱	۰/۵	۱۶	۳/۴
۲	-۸/۰	۷	-۱/۰	۱۲	۱/۰	۱۷	۴/۵
۳	-۷/۵	۸	-۰/۷	۱۳	۱/۳	۱۸	۷/۵
۴	-۴/۰	۹	-۰/۶	۱۴	۲/۸	۱۹	۹/۵
۵	-۲/۵	۱۰	۰/۰	۱۵	۳/۰	۲۰	۱۴/۰

جدول(۷-۱): سری بازدهٔ ماهانهٔ یک سبد فرضی به درصد

این سری بازده از کوچک به بزرگ مرتب شده است. برای محاسبهٔ ارزش‌درمعرض‌ریسک در سطح اطمینان ۹۵ درصد، جایگاه صدک پنجم را از طریق رابطهٔ (۷-۲) محاسبه می‌کنیم.

$$n_{0.05} = \frac{5 \times 20}{100} + \frac{1}{2} = 1.5$$

بنابراین صدک پنجم برابر است با بازدهٔ اول بعلاوهٔ نصف اختلاف بازدهٔ دوم و اول.

$$q_r(0.05) = -10\% + 0.5(-8\% + 10\%) = -9\%$$

ارزش درمعرض‌ریسک در سطح اطمینان ۹۵٪ برای افق زمانی یک‌ماهه برابر است با:

$$VaR = -1000 \times -9\% = 90$$

شبیه‌سازی تاریخی بوت‌استرپ[1]

بوت‌استرپ روشی ساده ولی بسیار سودمند است که به بهبود روش شبیه‌سازی تاریخی کمک می‌کند. این روش از قابلیت درک بالایی برخوردار است و کاربرد آن آسان است. در روش ابتدایی بوت‌استرپ، با یک نمونهٔ اصلی به اندازهٔ n کارمان را آغاز می‌کنیم. سپس یک نمونهٔ تصادفی با همان اندازه از این نمونهٔ اصلی استخراج می‌کنیم و این کار را به تعداد بسیار زیاد مثلاً ۱۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ بار تکرار می‌کنیم. استخراج این نمونه‌ها مستلزم داشتن یک مولد یکنواخت اعداد تصادفی[2] برای انتخاب یک عدد تصادفی از ۱ تا n است. برای درک بهتر تصور کنید که اعداد ۱ تا n را روی توپ‌های کوچک و مشابهی نوشته و آن‌ها را داخل گردانه‌ای ریخته‌ایم. هر بار که گردانه را می‌چرخانیم توپی از آن خارج می‌شود. روی هر توپ عددی نوشته شده که نمایندهٔ یک عدد از نمونهٔ اصلی است. بدین ترتیب در هر بار، عدد خاصی انتخاب می‌شود. البته، این نمونه‌برداری با جایگذاری است. وقتی انتخاب اعداد تصادفی را n بار تکرار کنیم، نمونه‌ای به اندازهٔ نمونهٔ اصلی خواهیم داشت. بدین‌ترتیب فرآیند نمونه‌برداری را آن‌قدر ادامه می‌دهیم که تعداد زیادی از این نمونه‌های هم‌اندازه ایجاد شود. با ایجاد هر نمونهٔ جدید که به آن نمونه‌برداری مجدد[3] می‌گویند، شاهد آن هستیم که برخی از اعداد بیش از یک بار انتخاب شده و برخی دیگر اصلاً انتخاب نشده‌اند. بنابراین نمونه‌های جدید نوعاً متفاوت از نمونهٔ اصلی است. از نمونه‌های جدید، جهت برآورد پارامترهای موردنظر استفاده می‌شود. هرکدام از این نمونه‌ها، برآوردی جدید از پارامتر موردنظر در اختیارمان قرار می‌دهد. از آن‌جا که در محاسبهٔ VaR ما به‌دنبال صدک‌های توزیع بازده هستیم، هر نمونهٔ جدید تخمین جدیدی از VaR ارایه می‌نماید و ما می‌توانیم میانگین برآوردهای حاصل از نمونه‌های جدید را به‌عنوان بهترین برآورد از VaR درنظر بگیریم. رویکرد مشابهی را می‌توان جهت برآورد ES مورد استفاده قرار داد. بدین‌ترتیب، بهترین برآورد ما از ES میانگین «ES»های حاصل از نمونه‌های جدید است. به‌عنوان مثال اگر ۱۰۰۰ نمونهٔ جدید ایجاد کنیم، بهترین برآورد ما از VaR و

1. bootstrapped historical simulation
2. uniform random number generator
3. resampling

ES به ترتیب میانگین «VaR»ها و «ES»های حاصل از این ۱۰۰۰ نمونه است. تخمین‌های بوت‌استرپ اغلب دقیق‌تر از تخمین‌های حاصل از نمونهٔ اصلی است.

بوت‌استرپ کاربردهای دیگری هم دارد. این روش بدون در نظرگرفتن این‌که آیا فرمولی برای تابع توزیع وجود دارد یا نه، ما را قادر به محاسبهٔ فاصلهٔ اطمینان پارامتر موردنظر می‌کند. مثلاً، اگر پارامتر موردنظر ما واریانس باشد، می‌توانیم واریانس هرکدام از نمونه‌های جدید را استخراج کرده و سپس بر اساس این واریانس‌ها، فاصلهٔ اطمینان را ایجاد نماییم. به‌عنوان مثال، اگر هزار نمونهٔ جدید داشته باشیم، هزار برآورد از واریانس خواهیم داشت. برای محاسبهٔ فاصلهٔ اطمینان در سطح اطمینان ۹۰٪، ابتدا برآوردهای حاصل از نمونه‌برداری مجدد را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. سپس جایگاه مقادیری را تعیین می‌کنیم که ابتدا و انتهای فاصله بر روی آن‌ها قرار می‌گیرد. این جایگاه‌ها معادل صدک‌های ۵٪ و ۹۵٪ است که بر اساس رابطهٔ (۷-۲) به‌راحتی قابل‌محاسبه است. به این ترتیب حد اطمینان پایینی و بالایی به‌دست می‌آید. بدیهی است که روش بوت‌استرپ نسبت به روش‌های سنتی جهت محاسبهٔ فاصلهٔ اطمینان با مفروضات و محدودیت‌های کمتری مواجه است.

شبیه‌سازی تاریخی موزون[1]

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی، روش وزن‌دهی به مشاهدات گذشته است. در این روش به تمامی مشاهدات موجود در نمونه، وزن یکسانی تخصیص داده می‌شود. به‌عبارتی دیگر اهمیت تمامی مشاهدات گذشته در محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک برابر است. این ساختار وزن‌دهی آبستن مشکلات متعددی است و به‌سختی قابلیت توجیه دارد.

رویکرد اختصاص اوزان مساوی باعث می‌شود که تخمین‌های ما از ریسک نسبت به رویدادهای مهم بازار غیرحساس باشد. به‌عنوان مثال، ریزش بازار بر اثر یک شوک بزرگ تنها در سطوح اطمینان بسیار بالا بر ارزش درمعرض‌ریسک تأثیر می‌گذارد و این در حالی است که مقادیر ارزش درمعرض‌ریسک در سطوح اطمینان عادی گویای این امر نخواهد

1. weighted historical simulation (WHS)

بود. این افزایش ریسک تنها در صورت ادامهٔ ریزش بازار در دوره‌های بعدی بر مقدار ارزش درمعرض‌ریسک اثر می‌گذارد. توجه کنید که افزایش ریسک دقیقاً پس از رخداد اولین شوک در برآوردهای ES منعکس می‌گردد و این نشان می‌دهد که ES سنجه‌ای است که نسبت به VaR حاوی اطلاعات بیشتری است.

ساختار وزن‌دهی برابر هم‌چنین فرض را بر این می‌گیرد که هرکدام از مشاهدات موجود در نمونه، دقیقاً همانند هم بوده و در طی زمان مستقل از دیگر مشاهدات است. این فرض یکسانی و استقلال مشاهدات واقع‌گرایانه نیست، چراکه تلاطم‌ها در طی زمان تغییر می‌کنند و بسیار دیده شده که دوره‌های پرتلاطم و دوره‌های کم‌تلاطم با هم واقع می‌شوند و به‌اصطلاح تشکیل خوشه می‌دهند.

در روش شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی، هرکدام از مشاهدات وزنی دارد و ناگهان این وزن با خارج‌شدن از پنجرهٔ نمونه‌برداری، صفر می‌شود. چرا یک مشاهدهٔ قدیمی که در انتهای پنجرهٔ غلتان قرار دارد، دارای وزنی معادل جدیدترین مشاهده است و چرا با گذشت تنها یک دوره (مثلاً، یک روز) همین مشاهدهٔ قدیمی هیچ ارزشی در محاسبات نخواهد داشت و ناگهان وزن آن صفر می‌شود؟ بدیهی است که حتی قدیمی‌ترین مشاهدات هم حاوی اطلاعات است و اختصاص وزن صفر به آن‌ها منطقی به‌نظر نمی‌رسد.

برای تعدیل داده‌ها و کاهش مشکلات مربوط به روش شبیه‌سازی مقدماتی، روش‌های مختلفی وجود دارد. این روش‌ها عبارتند از شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با زمان، شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با تلاطم، شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با همبستگی، شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده. سه روش اخیر در حیطهٔ رویکردهای نیمه‌پارامتریک قرار می‌گیرد که در فصل بعدی به آن‌ها خواهیم پرداخت.

شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با زمان[1]

این روش توسط بودوخ، ریچاردسون و وایت‌لو ارایه شد[2] و شامل وزن‌دهی مشاهدات بر اساس اهمیت نسبی آن‌ها با توجه به پارامتر زمان است. این روش به ما امکان می‌دهد که به‌جای رفتار مشابه با تمامی مشاهدات، به مشاهدات جدیدتر، وزن بیشتری بدهیم.

1. age-weighted historical simulation
2. Boudoukh, Richardson and Whitelaw (1998).

روش‌های مختلفی برای وزن‌دهی وجود دارد، اما رایج‌ترین آن‌ها اختصاص اوزان نمایی به مشاهدات است. اگر وزن «s»امین بازدهٔ تاریخی را با w_s و تعداد مشاهدات تاریخی را با k نشان دهیم، w_s از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$w_s = (1-\lambda)\lambda^{t-s-1} \qquad s = t-k,\ldots,t-1 \quad (۵-۷)$$

که λ بین صفر و یک بوده و منعکس‌کنندهٔ نرخ فروپاشی نمایی[1] یا ضریب هموارسازی مربوط به وزن یک مشاهده با توجه به مسن‌شدن آن است. اگر لاندا نزدیک به یک باشد، نمایانگر نرخ فروپاشی آهسته است و اگر با یک فاصلهٔ زیادی داشته باشد، نمایان‌گر نرخ فروپاشی سریع است. بنابراین، لاندای بزرگ‌تر به مشاهدات اخیر نسبت به مشاهدات قدیمی وزن بیشتری اختصاص می‌دهد. اگر بخواهیم دقیق‌تر رفتار کنیم باید سمت راست رابطهٔ (۷-۵) را بر $1-\lambda^k$ تقسیم کنیم. یعنی:

$$w_s = \frac{(1-\lambda)\lambda^{t-s-1}}{1-\lambda^k} \qquad s = t-k,\ldots,t-1 \quad (۶-۷)$$

اما، از آنجاکه با بزرگ‌شدن k، مخرج کسر به یک نزدیک می‌شود، خصوصاً برای «k»های بزرگ نیازی به استفاده از این رابطه نیست و همان رابطهٔ (۷-۵) کفایت می‌کند. مثلاً، اگر ۱۰۰ بازدهٔ تاریخی در اختیار داشته باشیم، وزن جدیدترین بازده یعنی صدمین بازده برابر است با:

$$w_{100} = (1-\lambda)\,\lambda^{101-100-1} = (1-\lambda)\lambda^{0} \quad (۷-۷)$$

هم‌چنین وزن قدیمی‌ترین بازده یعنی اولین بازده برابر است با:

$$w_{1} = (1-\lambda)\,\lambda^{101-1-1} = (1-\lambda)\lambda^{99} \quad (۸-۷)$$

به همین ترتیب می‌توانیم وزن سایر داده‌های تاریخی را محاسبه کنیم. در واقع در روش شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با زمان، تنها اوزان مساوی در شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی یعنی $1/k$ جایگزین اوزان زمانی آن‌ها می‌شود.

1. exponential rate of decay

برای به‌دست‌آوردن ارزش درمعرض‌ریسک ابتدا بازده‌های تاریخی را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و وزن هر داده را در مقابل آن قرار می‌دهیم . سپس بر اساس سطح اطمینان موردنظر، صدک مربوطه را به‌دست می‌آوریم. مثلاً، برای به‌دست‌آوردن صدک پنجم، اوزان کوچکترین بازده‌ها را باهم جمع می‌کنیم. هر جا که این مجموع برابر ۵٪ شود، بازدۀ متناظر، همان صدک ۵٪ خواهد بود. اگر مجموع اوزان محاسبه‌شده مابین دو بازده قرار گیرد، می‌توانیم با برقراری یک تناسب ساده بین اوزان و بازده‌ها، صدک موردنظر را محاسبه کنیم. با داشتن صدک بازده در سطح اطمینان موردنظر، جهت محاسبۀ VaR از رابطۀ (۷-۳) استفاده می‌کنیم.

رویکرد شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با زمان دارای چهار ویژگی جذاب است:

- این روش تعمیم جالبی از روش شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی است.
- این قابلیت وجود دارد که با انتخاب مناسب λ، ارزش درمعرض‌ریسک را نسبت به مشاهدات اخیر حساس‌تر کرد. این انتخاب هم‌چنین در شناسایی و ادارۀ زیان‌های بزرگ خوشه‌ای نیز مؤثر است.
- این روش در جهت کاهش انحرافات ناشی از حوادثی که غیرمحتمل است، کمک فراوانی می‌کند. با قدیمی‌شدن یک مشاهده، وزن و اثر آن به‌تدریج در طی زمان افت می‌کند. علاوه بر این وقتی یک مشاهده از پنجرۀ غلتان بیرون می‌افتد، وزن آن به جای این‌که از $1/k$ به صفر تقلیل یابد، از $\lambda(1-\lambda)^{k-1}$ به صفر کاهش می‌یابد. از آن‌جا که $\lambda(1-\lambda)^{k-1}$ به ازای هر عدد منطقی برای λ کمتر از $1/k$ است، شوک حاصله کمتر از آن چیزی خواهد بود که در روش مقدماتی منظور می‌گردد. در واقع می‌توان گفت که روش شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با زمان در مقایسه با شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی، کاهندۀ اثرات شبح است.
- نهایتاً این‌که می‌توان وزن‌دهی را در جهت بهبود تخمین‌ها اصلاح کرد. از آنجا که این روش اثر حوادث افراطی گذشته را با گذشت زمان کاهش می‌دهد، افزایش اندازۀ نمونه را در طی زمان ممکن می‌سازد. با استفاده از این روش می‌توان با هر داده جدید، نمونه را بزرگ‌تر کرده و بنابراین به‌طور بالقوه این امکان فراهم می‌آید که هیچ مشاهدۀ با ارزشی از دست نرود.

به‌هرحال با ثابت در نظرگرفتن سایر شرایط، اوزان زمانی، اندازهٔ مؤثر نمونه را کـاهش می‌دهد. با کاهش مقدار لاندا اندازهٔ مؤثر نمونه با شدت بیشتری کاهش می‌یابـد. در چنـین حالتی توالی سودها و زیان‌های بزرگ می‌تواند به ایجاد انحرافات بزرگی در برآوردها منجـر شود. به‌علاوه پریتسکر بر اساس مطالعه‌ای نشان داد که در این روش هنوز هم برآوردهای ارزش درمعرض‌ریسک به‌اندازهٔ کافی نسبت به تغییرات زیربنایی در ریسک حساس نیست.[۱]

شبیه‌سازی تاریخی با استفاده از تخمین چگالی ناپارامتریک[۲]

برای بهبود بالقوهٔ روش شبیه‌سازی تاریخی، گاهی اوقات اسـتفاده از تخمـین چگـالی ناپارامتریک پیشنهاد می‌شود. بـرای درک فلسـفهٔ ایـن روش بایـد بـدانیم کـه روش‌هـای شبیه‌سازی تاریخی که تا کنون تشریح شد، بهترین استفاده را از داده‌های موجـود بـه‌عمل نمی‌آورد. این روش‌ها فرصت تخمین ارزش درمعرض‌ریسـک را تنهـا در سـطوح اطمینـان گسسته فراهم می‌آورد. این سطوح اطمینان توسط اندازهٔ مجموعهٔ داده‌هـا تعیـین می‌شـود. البته، این مسأله به‌ظاهر با استفاده از یک تناسب ساده بین دو عدد مرتفع می‌شـود، امـا در این میان فرض مهمی وجود دارد. مطابق این فرض، توزیع متغیر تصادفی بین این دو عدد، یکنواخت است. بدیهی است که نقض این فرض باعث ایجاد اریب در برآوردها می‌شود.

تخمین چگالی ناپارامتریک راه‌حل بالقوه‌ای را برای این مسـائل ارایـه می‌دهـد. ایـدهٔ اصلی تخمین چگالی ناپارامتریک این است که با داده‌ها به‌گونه‌ای رفتار کنیم کـه گویـا از یک تابع آماری ناشناخته یا نامعین حاصـل شـده‌اند. ایـن رویکـرد امکـان محاسـبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک را در هر سطح اطمینانی فراهم می‌آورد و بدین ترتیـب از محـدودیت‌های ناشی از اندازهٔ مجموعهٔ داده‌ها اجتناب می‌گردد. در واقع، این روش ما را قادر می‌سـازد کـه خطوطی را از میان و یـا کناره‌هـای بخش‌هـای یـک هیسـتوگرام رسـم کنـیم و بنـابراین می‌توانیم نواحی زیر این خطوط را به‌عنوان یـک تـابع چگـالی احتمـالِ جـایگزین در نظـر بگیریم. با جایگزینی این توزیع به‌جای توزیع تجربی، محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک در هر سطح اطمینانی ممکن می‌شود.

---

1. Pritsker (2001).
2. nonparametric density estimation

برای نشان‌دادن تفاوت بین تخمین چگالی پارامتریک و ناپارامتریک، تصور کنید می‌خواهیم تابع چگالی یعنی $f(x)$ را برای متغیر تصادفی پیوستهٔ X در یک نقطهٔ خاص مثل x برآورد کنیم. فرض کنید توالی X یعنی x_i به‌طور یکسان و مستقل از هم توزیع شده باشد. اگر تابع چگالی $f(x)$ از خانوادهٔ توابع آماری شناخته‌شدهٔ پارامتریک (مثلاً نرمال) باشد، برآورد چگالی احتمال تنها به برآورد تعداد انگشت‌شماری پارامتر محدود می‌شود که بر یک چگالی خاص در خانوادهٔ پارامتریک دلالت دارد. اگر فرض کنیم که این متغیر تصادفی از هیچ‌کدام از توزیع‌های پارامتریک تبعیت نمی‌کند، برآورد چگالی $f(x)$ در تمامی نقاط مربوط به متغیر تصادفی، شامل برآورد تعداد نامحدودی پارامتر می‌باشد. در دانش آمار این مسأله به برآورد ناپارامتریک[1] معروف است.

هیستوگرام، برآورکنندهٔ ساده و برآورکنندهٔ کرنل متداول‌ترین روش‌های تخمین چگالی ناپارامتریک است. در ادامه، به تشریح هرکدام از این روش‌ها می‌پردازیم.

هیستوگرام[2]

هیستوگرام ساده‌ترین و در عین حال متداول‌ترین برآوردکنندهٔ چگالی ناپارامتریک است. اگر داده آغازین را با x_0، عرض طبقه[3] را با h و تعداد مشاهدات را با n نمایش دهیم، هیستوگرام را می‌توان به‌صورت فواصل زیر تعریف کرد:

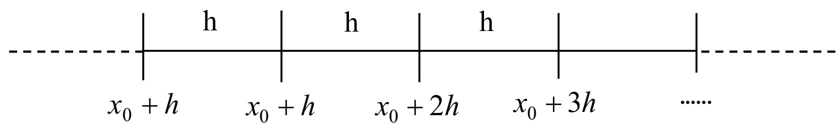
$$Interval_m = [x_0 + mh, x_0 + (m+1)h) \quad m = \dots, -1, 0, 1, \dots \qquad (۹-۷)$$

که m یک عدد صحیح است و $Interval_m$ نمایان‌گر «m»امین فاصله است. در این‌جا به‌صورت اختیاری این فاصله را از سمت چپ، بسته و از سمت راست، باز در نظر گرفته‌ایم. برای ساخت یک هیستوگرام، باید نقطه آغازین و نیز عرض طبقه را انتخاب کنیم.

نمودار صفحهٔ بعد نحوهٔ ساخت هیستوگرام را به نمایش می‌گذارد.

---

1. nonparametric estimation
2. histogram
3. bin width



نمودار (۷-۱): نحوهٔ ساخت هیستوگرام

تابع چگالی احتمال تخمینی هیستوگرام به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} I\,[x_0 + mh, x_0 + (m+1)h) \qquad (۱۰-۷)$$

که $\hat{f}(x)$ برآوردی از تابع چگالی ناشناخته یعنی $f(x)$ است. I تابع معـرف اسـت و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = \begin{cases} 1 & if\ (x_0 + mh \le x_i < x_0 + (m+1)h) \\ 0 & if \qquad Otherwise \end{cases} \qquad (۱۱-۷)$$

اگر مشاهدهٔ موردنظر در محدودهٔ «m»امین فاصله قرار گیرد، تابع معرف مقدار یـک و در غیراین‌صورت، صفر می‌گیرد. بدیهی است که انتخاب نقطهٔ آغـازین و خصوصـاً عـرض طبقه بر نتایج تأثیر می‌گذارد.

اکنون می‌توان صدک آلفای توزیع احتمال تخمینی را از طریق رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \hat{F}_x^{-1}(\alpha) &= q_x(\alpha) \\ &= L_q + \left(\frac{\left(A \times n/100\right) - \sum_{i=1}^{n} I\,(-\infty, x_0 + (m-1)h)}{\sum_{i=1}^{n} I\,[x_0 + mh, x_0 + (m+1)h)} \right) \times h \end{aligned} \qquad (۱۲-۷)$$

$\hat{F}_x^{-1}(\alpha)$ معکوس تابع توزیع تجمعی x در سطح احتمال α است که معادل صـدک آلفای متغیر x یعنی $q_x(\alpha)$ است. L_q کران پایین طبقهٔ صدک‌دار، $A = 100\alpha$ و جملـهٔ دوم صورت، فراوانی تجمعی طبقهٔ ماقبل و عبارت مخرج نیز گویای فراوانـی مطلـق طبقـهٔ

صدک‌دار است. طبقهٔ صدک‌دار، اولین طبقه‌ای است که درصد فراوانی تجمعی آن بزرگ‌تر یا مساوی α است.

محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک

برای محاسبهٔ VaR ابتدا باید بازدهٔ بحرانی را از طریق صدک آلفای هیستوگرام به‌دست آورد. حاصل‌ضرب این صدک در قیمت جاری دارایی، ارزش درمعرض‌ریسک است. در این‌جا برای درک چگونگی محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک مثالی ارایه می‌کنیم.

مثال (۷–۲): محاسبهٔ VaR بر اساس هیستوگرام

داده‌های این مثال همانند مثال (۷–۱) است. برای ساخت هیستوگرامِ بازده‌های سبد فرضی جدول (۷–۱)، نقطهٔ آغازین را ۱۰٪– و عرض طبقه را ۵٪ انتخاب می‌کنیم. جدول زیر بازده‌های طبقه‌بندی‌شده را به نمایش می‌گذارد.

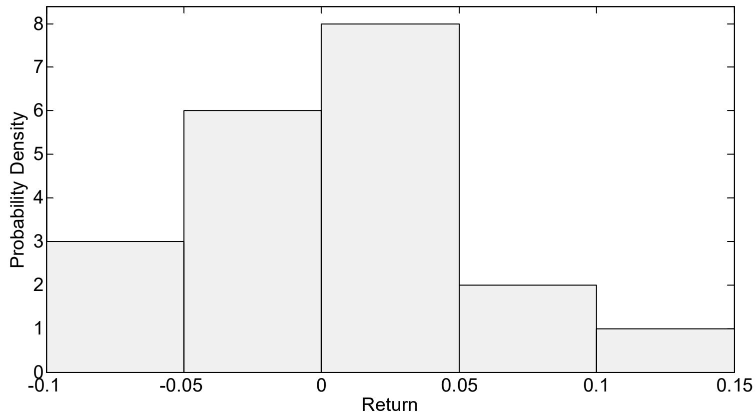
طبقات (٪)	فراوانی مطلق	فراوانی تجمعی	درصد فراوانی تجمعی	چگالی احتمال
(۵) – (۱۰)	۳	۳	۱۵	۳
۰ – (۵)	۶	۹	۴۵	۶
۵ – ۰	۸	۱۷	۸۵	۸
۱۰ – ۵	۲	۱۹	۹۵	۲
۱۵ – ۱۰	۱	۲۰	۱۰۰	۱
جمع	۲۰	۶۸	۳۴۰	۲۰

جدول (۷–۲): جدول فراوانی بازدهٔ ماهانهٔ یک سبد فرضی

ستون آخر این جدول شامل چگالی احتمال تخمینی است. به‌عنوان مثال اولین عدد این ستون به‌ترتیب زیر حاصل شده است:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{20 \times 0.05} \times 3 = 3$$

چگالی احتمال تخمینی هر طبقه تابعی از فراوانی مطلق آن است. توجه داشته باشید که در جدول (۷–۲) به‌طور اتفاقی مقادیر ستون دوم و پنجم مشابه هم است. هیستوگرام این داده‌ها به‌صورت زیر است.



نمودار (۷–۲): هیستوگرام بازدهٔ ماهانهٔ یک سبد فرضی

برای محاسبهٔ VaR ابتدا صدک آلفای بازده را محاسبه می‌کنیم:

$$q_r(\%1) = -0.1 + \left(\frac{(1\times 20/100) - 0}{3}\right) \times 0.05 = -0.097$$

$$q_r(\%5) = -0.1 + \left(\frac{(5\times 20/100) - 0}{3}\right) \times 0.05 = -0.083$$

در نهایت ارزش درمعرض‌ریسک در سطح اطمینان ۹۹ و ۹۵ درصد برابر است با:

$$1-\alpha = \%99 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.097 = 97$$

$$1-\alpha = \%95 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.083 = 83$$

برآوردکنندهٔ ساده[۱]

خوشبختانه برای تخمین چگالی ناپارامتریک روش‌های مختلفی وجـود دارد. در روش برآوردکنندهٔ ساده از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود:

1. naive estimator

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{2nh}\sum_{i=1}^{n}I(x-h\le x_i<x+h) \quad (۱۳-۷)$$

در این‌جا به h، عرض بند[1] می‌گویند. روش برآوردکنندهٔ ساده هیستوگرامی می‌سازد که در آن فرض می‌شود، هر مشاهده در مرکز فاصلهٔ نمونه‌برداری قرار دارد. به این ترتیب نیاز به تعیین نقطهٔ آغازین مرتفع می‌شود. به‌هرحال هنوز مسألهٔ انتخاب عرض بند لاینحل باقی می‌ماند. این انتخاب می‌تواند در هموارسازی نتایج تفاوت‌های بزرگی ایجاد کند. در فصل بعدی به‌هنگام تشریح برآوردکنندهٔ کرنلِ نرمال[2]، به نحوهٔ بهینه‌سازی عرض بند می‌پردازیم.

تشریح برآوردکنندهٔ ساده بر اساس توابع وزنی کار مفیدی است. اگر تابع وزن را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$w(u)=\begin{cases}1/2 & if \quad |u|<1\\ 0 & if \quad |u|\ge 1\end{cases} \quad (۱۴-۷)$$

می‌توان برآوردکنندهٔ ساده را با رابطهٔ زیر بیان کرد:

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h}w\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad (۱۵-۷)$$

این برآوردکننده دارای ایرادهای متعددی است، از جمله این‌که به تمامی نقاط در فاصلهٔ $(x-h,x+h)$ وزن یکسانی می‌دهد.

تابع توزیع تجمعی برآوردکنندهٔ ساده مستقیماً از تابع چگالی آن حاصل می‌شود. به خاطر داریم که در توزیع‌های پارامتریک، احتمال تجمعی یک فاصلهٔ معین از طریق محاسبهٔ سطح زیر منحنی چگالی احتمال محصور در آن فاصله به‌دست می‌آید. این سطح محصور در واقع با انتگرال‌گیری از تابع چگالی احتمال به‌دست می‌آید.

$$F(x)=\int_{a}^{b}f(x)dx \quad (۱۶-۷)$$

1. bandwidth
2. normal kernel estimator

که $F(x)$ تابع توزیع تجمعی و $f(x)$ تابع چگالی احتمال پارامتریک است.

در این‌جا نیز روش کار به همین منوال است. اما، چون انتگرال‌گیری از تابع چگالی احتمال برآوردکنندهٔ ساده به‌سادگی امکان‌پذیر نیست، از معادل گسستهٔ رابطهٔ فوق استفاده می‌کنیم. به این روش انتگرال‌گیری عددی گویند. با داشتن چگالی احتمال برآوردکنندهٔ ساده، به‌راحتی می‌توان تابع توزیع تجمعی را بر اساس رابطهٔ زیر تقریب زد:

$$\hat{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} \hat{f}(x_i) \Delta x_i \quad (۱۷-۷)$$

که $\hat{F}(x)$ تخمینی از تابع توزیع تجمعی ناشناختهٔ جامعه یعنی $F(x)$ است. در صورتی که Δx_i به اندازهٔ کافی کوچک باشد، این رابطه با تقریب خوبی، سطح زیر تابع چگالی احتمال را محاسبه می‌کند. برای راحتی معمولاً اندازهٔ فواصل را یکسان در نظر می‌گیرند. بدین ترتیب رابطهٔ (۷–۱۷) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\hat{F}(x) = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \quad (۱۸-۷)$$

بر اساس رابطهٔ (۷–۱۸)، برای محاسبهٔ احتمال تجمعی باید فاصلهٔ موردنظر را به فواصل کوچک و هم‌اندازه‌ای تقسیم کرد. حاصل‌ضرب هر فاصله در چگالی احتمال نقطهٔ x_i، تقریبی از مساحت سطح محصور در آن فاصله و منحنی چگالی احتمال است و مجموع مساحت مستطیل‌های حاصل، تقریبی از احتمال تجمعی در فاصلهٔ موردنظر است.

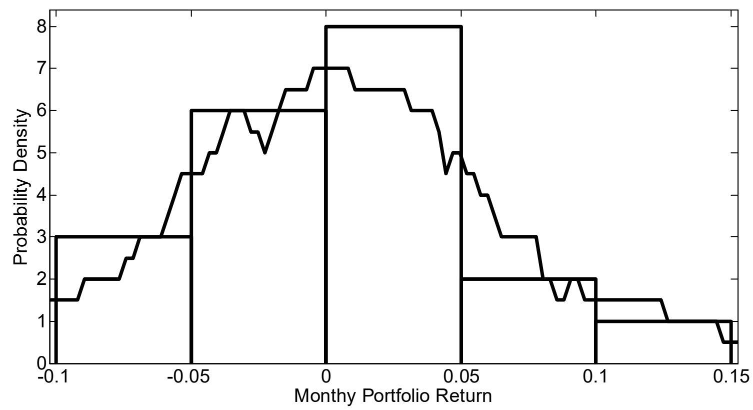
می‌توان تابع وزن برآوردکنندهٔ ساده را با تابع کرنل جایگزین کرد. این جایگزینی منجر به تولد برآوردکنندهٔ دیگری به‌نام کرنل می‌شود. خانوادهٔ کرنل شامل برآوردکننده‌های متنوعی است که در بخش بعدی به معرفی برخی از مهم‌ترین آن‌ها می‌پردازیم.

محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک

برای محاسبهٔ VaR کافی است که بازدهٔ بحرانی را از طریق صدک آلفای برآوردکنندهٔ ساده محاسبه نماییم. بهترین روش تشریح، ارایهٔ یک مثال است.

مثال (۷-۳): محاسبهٔ VaR بر اساس برآوردکنندهٔ ساده

در این مثال نیز از داده‌های مثال (۷-۱) استفاده می‌کنیم. در نمودار زیر چگالی احتمال حاصل از برآوردکنندهٔ ساده برای بازده‌های ماهانهٔ سبد فرضی ارایه شده است.



نمودار (۷-۳): تابع چگالی احتمال برآوردکنندهٔ ساده برای بازدهٔ ماهانهٔ سبد فرضی

در این نمودار، عرض بند را برابر ۰/۰۵ در نظر گرفته‌ایم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، برای مقایسه میزان برازندگی چگالی احتمال تخمینی با داده‌های واقعی، هیستوگرام بازدهٔ ماهانهٔ سبد دارایی نیز ترسیم شده است. جدول زیر شامل برخی اطلاعات مربوط به دنبالهٔ سمت چپ نمودار (۷-۳) است.

بازده (٪)	فراوانی	چگالی احتمال	چگالی تجمعی	احتمال تجمعی (٪)
-۱۵/۰	۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰۰
-۱۴/۵	۱	۰/۵	۰/۵	۰/۲۵
-۱۴/۰	۱	۰/۵	۱/۰	۰/۵۰
-۱۳/۵	۱	۰/۵	۱/۵	۰/۷۵
-۱۳/۰	۱	۰/۵	۲/۰	۱/۰۰
-۱۲/۵	۲	۱/۰	۳/۰	۱/۵۰
-۱۲/۰	۳	۱/۵	۴/۵	۲/۲۵
-۱۱/۵	۳	۱/۵	۶/۰	۳/۰۰
-۱۱/۰	۳	۱/۵	۷/۵	۳/۷۵
-۱۰/۵	۳	۱/۵	۹/۰	۴/۵۰
-۱۰/۰	۳	۱/۵	۱۰/۵	۵/۲۵

جدول (۷-۳): مشخصات دنبالهٔ سمت چپ نمودار (۷-۳) برای بازده‌هایی به فاصلهٔ ۰/۰۰۵

در این جدول، چگالی احتمال و احتمال تجمعی تخمینی برای مقادیری به فاصلهٔ ۰/۰۰۵ محاسبه شده است. توجه داشته باشید که عرض بند (h) برابر ۰/۰۵ و فاصلهٔ بازده‌ها (Δr) برابر ۰/۰۰۵ است. ستون دوم شامل فراوانی بازده‌های مشاهده‌شده در بازهٔ $(x-h, x+h)$ است. ستون سوم شامل چگالی احتمال تخمینی است که بر اساس رابطهٔ (۷–۱۳) به‌دست آمده است. به‌عنوان مثال، چگالی احتمال بازدهٔ ۱۲/۵٪– برابر است با:

$$\hat{f}(-12.5\%) = \frac{1}{2 \times 20 \times 0.05} \times 3 = 1.5$$

ستون پنجم، احتمال تجمعی تخمینی است که در واقع حاصل‌ضرب ستون چهارم در فاصلهٔ ثابت ۰/۰۰۵ است. این ستون بر اساس رابطهٔ (۷–۱۸) به‌دست آمده است. به‌عنوان مثال احتمال تجمعی بازدهٔ ۱۴٪– برابر است با:

$$\hat{F}(-14\%) = 0.005 \times (0 + 0.5 + 0.5) = 0.005 \times 1 = 0.5\%$$

برای محاسبهٔ VaR باید صدک آلفای بازده را محاسبه کنیم. این صدک معادل معکوس تابع توزیع تجمعی تخمینی در سطح احتمال آلفاست. بر اساس جدول (۷–۳) صدک بازده برای احتمال ۱٪ برابر است با:

$$q_r(0.01) = \hat{F}^{-1}(0.01) = -0.13$$

مطابق جدول (۷–۳)، احتمال ۵٪ بین دو احتمال ۴/۵٪ و ۵/۲۵٪ قرار می‌گیرد. با یک تناسب ساده میان این احتمالات و بازده‌های متناظر یعنی ۱۰/۵٪– و ۱۰٪– خواهیم داشت:

$$q_r(0.05) = \hat{F}_r^{-1}(0.05) = -0.10167$$

اگر قیمت جاری سبد دارایی ۱،۰۰۰ تومان باشد، VaR در سطوح اطمینان ۹۵٪ و ۹۹٪ برابر است با:

$$1-\alpha = \%99 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.13 = 130$$
$$1-\alpha = \%95 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.10167 = 101.67$$

برآوردکنندهٔ کرنل[1]

برآوردکنندهٔ کرنل روشی برای تخمین چگالی ناپارامتریک و توانمندتر از هیستوگرام و برآوردکنندهٔ ساده است. این روش تعمیمی از برآوردکنندهٔ ساده است و تابع کرنل را جایگزین تابع وزن‌دهی می‌کند. در واقع این برآوردکننده به نقاطی که به x نزدیک‌تر است، وزن بیشتر و به نقاطی که از آن دورتر است، وزن کمتری اختصاص می‌دهد. برآوردکنندهٔ کرنل با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad (۱۹-۷)$$

$K(u)$ تابع کرنل می‌باشد و ممکن است یک تابع چگالی احتمال و یا یک تابع گسسته یا چندبخشی مثل رابطهٔ (۷-۱۴) باشد. برآوردکنندهٔ ساده در واقع یک برآوردکنندهٔ کرنل با تابع کرنل زیر است:

$$K(u) = \frac{1}{2} I \qquad (۲۰-۷)$$

و I نیز مثل گذشته تابع معرّف است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = \begin{cases} 1 & if\ |u| < 1 \\ 0 & Otherwise \end{cases} \quad (۲۱-۷)$$

در تمامی توابع کرنل، تابع معرف به‌صورت رابطهٔ (۷-۲۱) تعریف می‌شود.

تابع کرنل یک تابع وزن می‌باشد که به نقاط مختلف اوزان مختلفی را اختصاص می‌دهد. همان‌گونه که گفتیم این تابع به نقاط نزدیک به x وزن بیشتری می‌دهد و این وزن با دورشدن از x کاهش می‌یابد. نزدیکی یا دوری از x توسط پارامتر عرض بند یعنی h مشخص می‌شود. اگر h بزرگ باشد، محدوده بزرگی به‌عنوان همسایهٔ x در نظر گرفته می‌شود و متعاقباً چگالی تخمینی بسیار هموار خواهد شد. اگر h کوچک باشد، تنها محدودهٔ

1. kernel estimator

کوچکی در اطراف x به‌عنوان همسایهٔ آن شناسایی می‌شود و در نتیجه چگالی تخمینی بسیار متغیر خواهد شد.

تابع کرنل دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر است:

- $K(u)$ پیوسته است.
- $K(u)$ در اطراف صفر متقارن است، یعنی:

$$\int uK(u)\,du = 0 \text{ و } K(u) = K(-u) \quad (۲۲-۷)$$

- انتگرل $K(u)$ به ازای تمامی مقادیر u از منفی تا مثبت بینهایت برابر یک است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(u)\,du = 1 \qquad (۲۳-۷)$$

- اگر $K(u)$ را یک تابع چگالی در نظر بگیریم، امید ریاضی u^2، مثبت و محدود است.

$$0 < \int u^2 K(u)du < \infty \quad (۲۴-۷)$$

برخی از معروف‌ترین و متداول‌ترین توابع کرنل عبارتند از:

- مثلث[1]

$$K(u) = \left(1-|u|\right)I \qquad (۲۵-۷)$$

- اپانچنیکوف[2]

$$K(u) = \frac{3}{4}(1-u^2)\,I \quad (۲۶-۷)$$

1. triangle
2. Epanechnikov

- کوآرتیک[1] (درجهٔ چهار)

$$K(u) = \frac{15}{16}(1-u^2)^2 \, I \quad (۲۷-۷)$$

- نرمال

$$K(u) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad (۲۸-۷)$$

همان‌طور که گفتیم، گاهی اوقات برآوردکنندهٔ ساده را هم جزء خانوادهٔ کرنل طبقه‌بندی می‌کنند و به تابع وزن‌دهی آن، جعبه[2] می‌گویند.

شاید معروف‌ترین تابع کرنل، نرمال باشد که چیزی غیر از چگالی احتمال نرمال نیست. تابع کرنل نرمال در حیطهٔ آمار نیمه‌پارامتریک قرار دارد که در فصل بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تابع کرنل از بسیاری جهات شبیه یک تابع چگالی است. تنها تفاوت این دو در ویژگی تقارن است. تابع کرنل معمولاً متقارن است درحالی که تابع چگالی می‌تواند متقارن یا نامتقارن باشد.

محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک

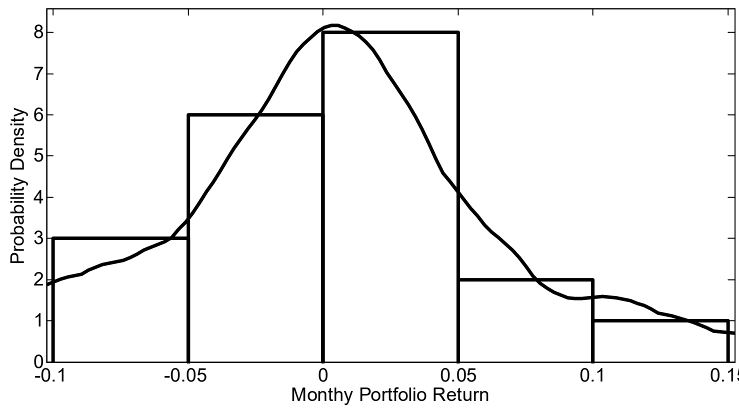
مطابق معمول برای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک باید بازدهٔ بحرانی را از طریق صدک آلفای برآوردکنندهٔ کرنل محاسبه نماییم.

مثال (۷-۴): محاسبهٔ VaR با اساس برآوردکنندهٔ کرنل

به‌منظور افزایش قابلیت مقایسهٔ نتایج، باز هم از داده‌های مثال (۷-۱) استفاده می‌کنیم. از میان توابع کرنل، تابع اپانچنیکوف را برای این مثال انتخاب کرده‌ایم. نمودار زیر چگالی برآوردکنندهٔ ساده با تابع اپانچنیکوف را برای داده‌های جدول (۷-۱) به تصویر می‌کشد.

---

1. quartic
2. box



نمودار (۷–۴): تابع چگالی احتمال برآوردکنندۀ کرنل (اپانچنیکوف) برای بازدۀ ماهانۀ سبد فرضی

در این مثال نیز عرض بند را ۰/۰۵ درنظر گرفته‌ایم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید چگالی احتمال حاصل از تابع اپانچنیکوف بسیار هموارتر از چگالی احتمال برآوردکنندۀ ساده است.

جدول زیر حاوی برخی اطلاعات مربوط به دنبالۀ سمت چپ نمودار چگالی فوق است.

بازده (٪)	فراوانی	چگالی احتمال	چگالی تجمعی	احتمال تجمعی (٪)
-۱۵	۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
-۱۴/۵	۱	۰/۱۴۳	۰/۱۴۳	۰/۰۷۱
-۱۴/۰	۱	۰/۲۷۰	۰/۴۱۳	۰/۲۰۶
-۱۳/۵	۱	۰/۳۸۳	۰/۷۹۵	۰/۳۹۸
-۱۳/۰	۱	۰/۴۸۰	۱/۲۷۵	۰/۶۳۸
-۱۲/۵	۲	۰/۷۰۵	۱/۹۸۰	۰/۹۹۰
-۱۲/۰	۳	۱/۰۴۳	۳/۰۲۳	۱/۵۱۱
-۱۱/۵	۳	۱/۳۳۵	۴/۳۵۸	۲/۱۷۹
-۱۱/۰	۳	۱/۵۸۲	۵/۹۴۰	۲/۹۷۰
-۱۰/۵	۳	۱/۷۸۵	۷/۷۲۵	۳/۸۶۳
-۱۰/۰	۳	۱/۹۴۲	۹/۶۶۸	۴/۸۳۴
--۹/۵۰	۳	۲/۰۵۵	۱۱/۷۲۳	۵/۸۶۱

جدول (۷–۴): مشخصات دنبالۀ سمت چپ نمودار (۷–۴) برای بازده‌هایی به فاصلۀ ۰/۰۰۵

در این‌جا، چگالی احتمال تخمینی بر اساس رابطهٔ (۷-۱۹) با تابع کرنل اپانچنیکوف (رابطهٔ (۷-۲۶)) به‌دست آمده است. به‌عنوان مثال، چگالی بازدهٔ ۱۲/۵-٪ برابر است با:

$$\hat{f}(-12.5\%) = \frac{1}{20 \times 0.05} \times \frac{3}{4}\left[\left(1-\left(\frac{-0.0125+0.1}{0.05}\right)^2\right)+\left(1-\left(\frac{-0.0125+0.08}{0.05}\right)^2\right)\right] = 0.705$$

ستون آخر شامل احتمال تجمعی تخمینی است. مقادیر این ستون بر اساس رابطهٔ (۷-۱۸) به‌دست آمده است. چگالی احتمال برای بازده‌هایی به فاصلهٔ ۰/۰۰۵ محاسبه شده است. این فاصله برای به‌دست آوردن مقدار تقریبی سطح زیر منحنی در نمودار (۷-۴) اندکی بزرگ است. به همین دلیل مقادیر ستون آخر، تقریب‌های چندان دقیقی از احتمال تجمعی نیست و این در حالی است که در مثال (۷-۳) این فاصله برای محاسبهٔ نسبتاً دقیق احتمال تجمعی کفایت می‌کند. علت این امر به شکل چگالی احتمال مربوط می‌شود. در نمودار (۷-۳) مستطیل‌هایی به عرض ۰/۰۰۵ سطح زیر منحنی را با تقریب خوبی محاسبه می‌کند، اما در نمودار (۷-۴)، چنین مستطیل‌هایی تقریب خوبی از سطح زیر منحنی فراهم نمی‌آورد. اگر عرض مستطیل‌ها کاهش یابد، به‌طور بالقوه امکان بهبود تقریب‌ها فراهم می‌آید.

برای محاسبهٔ VaR باید صدک آلفای بازده را محاسبه کنیم. این صدک معادل معکوس تابع توزیع تجمعی تخمینی در سطح احتمال آلفاست. بر اساس جدول (۷-۴) صدک بازده برای احتمال ۱ درصد، بین بازده‌های ۱۲/۵٪- و ۱۲٪- و برای احتمال ۵ درصد، بین بازده‌های ۱۰٪- و ۹/۵٪- قرار می‌گیرد. با یک تناسب ساده صدک اول و پنجم برابر است با:

$$q_r(0.01) = F^{-1}(0.01) = -0.1240$$
$$q_r(0.05) = F^{-1}(0.05) = -0.0992$$

اگر قیمت جاری سبد دارایی ۱،۰۰۰ تومان باشد، VaR در سطوح اطمینان ۹۵٪ و ۹۹٪ برابر است با:

$$1-\alpha = \%99 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.1249 = 124$$
$$1-\alpha = \%95 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.0992 = 99.2$$

همان‌طور که گفتیم با کاهش عرض مستطیل‌ها، تقریب احتمال تجمعی و به‌دنبال آن صدک آلفا به‌طور بالقوه بهبود می‌یابد. در این مثال اگر عرض مستطیل‌ها (فواصل) را ۰/۰۰۰۱ درنظر بگیریم، صدک اول و پنجم به‌ترتیب برابر ۱۲/۲۷٪- و ۹/۶۸٪- می‌شود. VaR بر اساس این صدک‌ها برابر است با:

$$1-\alpha = \%99 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.1227 = 122.7$$
$$1-\alpha = \%95 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.0968 = 96.8$$

اختلاف بین برآوردهای VaR پس از بهبود تقریب‌ها، ناچیز به‌نظر می‌رسد، اما با افزایش قمیت سبد دارایی، همین اختلاف ناچیز قابل‌ملاحظه خواهد شد.

مزایا و معایب رویکردهای ناپارامتریک

هیچ رویکردی همیشه بهترین نیست. برای درک شایستهٔ رویکردهای ناپارامتریک باید از نقاط ضعف و قوت آن‌ها باخبر باشیم تا بهترین استفاده را از آن‌ها به‌عمل بیاوریم. برخی از مزایای رویکردهای ناپارامتریک عبارتند از:

- این رویکردها از قابلیت درک بالایی برخوردار است و به لحاظ مفهومی ساده می‌باشد.
- چون فاقد مفروضات پارامتریک در مورد توزیع بازدهٔ دارایی‌هاست، می‌تواند دنباله‌های ضخیم، چولگی و دیگر ویژگی‌های غیرنرمال را در خود جای دهد و این درحالی است که این ویژگی‌ها غالباً مشکلاتی را در رویکردهای پارامتریک ایجاد می‌کند.
- به‌لحاظ نظری، رویکردهای ناپارامتریک را می‌توان برای انواع موقعیت‌ها (مانند اوراق مشتقه) به‌کار برد.
- اغلب از داده‌هایی استفاده می‌کند که به‌سادگی در دسترس قرار دارد.
- با وجود این‌که شواهد رسمی در این زمینه نتایج مبهمی را ارایه داده‌اند، فعالان ریسک معتقدند که این رویکردها غالباً به‌لحاظ تجربی عملکرد کاملاً خوبی دارد.

- در مقایسه با دیگر رویکردها، آن‌ها را می‌توان به‌سادگی در یک برنامهٔ صفحه گسترده اجرا کرد.
- رویکردهای پارامتریک اغلب هنگام کارکردن با مسائلی با ابعاد بزرگ، متحمل مشکلات عملیاتی می‌شود. رویکردهای ناپارامتریک فاقد این دسته از مشکلات است، چراکه نیازی به ماتریس واریانس–کوواریانس ندارد و به این ترتیب مسائل ناشی از افزایش بعد ایجاد نمی‌شود.
- گزارش‌دهی نتایج حاصل از این رویکردها به مدیریت ارشد و دیگر علاقه‌مندان خارجی مانند مقام ناظر و مؤسسات رتبه‌بندی آسان است.
- ایجاد فواصل اطمینان برای ارزش درمعرض‌ریسک و ریزش موردانتظار ناپارامتریک آسان است.
- رویکردهای ناپارامتریک به‌طرز قابل‌ملاحظه‌ای تعدیلات و اصلاحات بالقوه را می‌پذیرد. در برخی از تعدیلات، این رویکردها را با رویکردهای پارامتریک ترکیب می‌کنند که به شکل‌گیری رویکردهای نیمه‌پارامتریک می‌انجامد. به‌عنوان مثال از ترکیب بوت‌استرپ با رویکردهای پارامتریک، شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده ایجاد می‌شود. وزن‌دهی داده‌های شبیه‌سازی تاریخی بر اساس تلاطم و همبستگی نیز جزء رویکردهای نیمه‌پارامتریک تلقی می‌شود. در فصل بعد به بررسی این رویکردها خواهیم پرداخت.

شاید بزرگترین نقطه ضعف رویکردهای ناپارامتریک این باشد که نتایج آن‌ها بسیار وابسته به مجموعهٔ داده‌های تاریخی است. این امر مسائل متعددی را به بار می‌آورد:

- اگر داده‌های مربوط به نمونهٔ تاریخی از شرایط آرام بازار حاصل شده باشد، رویکردهای ناپارامتریک اغلب برآوردهایی از VaR یا ES ارایه می‌دهد که ریسک پیش روی را بسیار دست پایین در نظر می‌گیرد. از طرفی دیگر، اگر نمونهٔ تاریخی مربوط به دوره‌ای پرتلاطم باشد، تخمین‌های VaR یا ES بسیار دست بالا خواهد بود.
- رویکردهای ناپارامتریک معمولاً در انعکاس تغییرات ایجادشده در شرایط بازار با مشکل مواجه است. مثلاً، اگر تغییری دائمی در ریسک نرخ ارز ایجاد گردد، مدتی

طول می‌کشد تا شبیه‌سازی تاریخی، تخمین‌هایی متناسب با سطح جدید ریسک تولید نماید. هم‌چنین این رویکردها معمولاً در بازتاب سریع اثر رخدادهای مهم عقیم است.

- اگر مجموعۀ داده‌های مورد استفاده حاوی شوک‌هایی باشد که انتظار تکرار آن‌ها را در آینده نداریم، این داده‌ها تخمین‌های ناپارامتریک را متأثر می‌سازد.
- بیشتر رویکردهای ناپارامتریک، تحت تأثیر پدیدۀ اثرات شبح یا اثرات سایه[1] است. بدین معنی که اثر رخدادهای مهم تا خروج آن‌ها از نمونه، برآوردها را تحت تأثیر قرار می‌دهد.
- برخی از رویدادها محتمل است ولی هنوز رخ نداده است. به‌طور کلی برآوردهای ناپارامتریک از VaR یا ES چنین حوادثی را در نظر نمی‌گیرد.
- تخمین‌های ناپارامتریک از VaR یا ES توسط بزرگترین زیان یا کوچکترین بازدۀ موجود در مجموعۀ داده‌ها محدود می‌گردد. در نسخه‌های ساده‌تر شبیه‌سازی تاریخی نمی‌توان از بزرگترین زیان تاریخی به زیان بزرگ دیگری رسید. نسخه‌های پیچیده‌تر رویکردهای ناپارامتریک تا حدودی این محدودیت را کم‌اثر می‌سازد، ولی با این وجود هنوز هم تخمین‌های ناپارامتریک به‌نحوی در بند بزرگ‌ترین زیان است. این بدان معنی است که رویکردهای ناپارامتریک برای ادارۀ رخدادهای فرین مناسب نیست، خصوصاً زمانی که نمونه‌هایی کوچک یا متوسط از داده‌های تاریخی در اختیار داشته باشیم.

به هر حال اغلب می‌توان برای این مسائل تدابیری اتخاذ کرد. مثلاً، می‌توان تلاطم‌ها، بحران‌های بازار، همبستگی و دیگر مسائل را تا حدی با تعدیلات نیمه‌پارامتریک برطرف کرد. اثرات شبح را نیز می‌توان با وزن‌دهی داده‌ها بر اساس زمان و رشد نمونه در طی زمان مرتفع ساخت.

علاوه بر مسائل یادشده، مسائلی هم در مورد طول دورۀ نمونه‌برداری وجود دارد. ما به یک دورۀ منطقاً طولانی نیاز داریم تا با داشتن نمونۀای که به اندازۀ کافی بزرگ است، به تخمین‌هایی با دقت قابل‌قبول دست یابیم. به‌عنوان یک قاعدۀ سرانگشتی باید بگوییم که بیشتر متخصصان، حداقل داده‌های روزانۀ دو سال را پیشنهاد می‌کنند. اگر برای هر سال

1. shadow effects

۲۵۰ روز معاملاتی در نظر بگیریم، این به معنی ۵۰۰ مشاهدهٔ روزانه است. از طرفی دیگـر، یک نمونهٔ بسیار بزرگ می‌تواند مشکلات خودش را داشته باشد. هرچه اندازهٔ نمونه بزرگ‌تر باشد، مشکلات زیر با شدت بیشتری نمایان می‌شود:

- مشکلات بیشتری در مورد داده‌های قدیمی ایجاد می‌گردد.
- نتایج توسط حوادثی که در گذشته رخ داده ولی تکرار آن‌ها نامحتمل است، تحت تأثیر قرار می‌گیرد و باید مدت بیشتری برای ناپدیدشدن اثرات شبح انتظار کشید.
- اطلاعاتی که در مشاهدات جاری بازار است، توسط دیگر مشاهدات کمرنگ‌تر می‌شود و بنابراین برآوردهای ریسک نسبت به شرایط جاری بازار حساسـیت کمتـری خواهـد داشت.
- مسائل بالقوهٔ بیشتری در مورد جمع‌آوری داده‌ها ایجاد می‌گردد. این مسأله خصوصاً در مورد ابزار مالی جدید نگران‌کننده است، چراکه داده‌های تاریخی گذشته‌های دور برای آن‌ها وجود ندارد و یا این داده‌ها نمایندهٔ خوبی برای آتیه آن‌ها نیست.

نتیجه‌گیری

استفاده از رویکردهای ناپارامتریک بسیار متداول است و از بسیاری جهات رویکردهای جذابی برای برآورد ریسک‌های مالی اسـت. آن‌هـا مشـاهدات تـاریخی را بـه‌طور منطقـی پی‌گیری می‌کنند و نسبت به برخی رویکردهای پارامتریک که بر اساس مفروضات ساده‌ای مانند فرض نرمال‌بودن داده‌ها استوار است، رجحان دارند. هم‌چنـین، می‌تـوان جهـت حـل برخی از نقاط ضعف رویکردهای مقـدماتی ناپارامتریـک، بـه‌طرز قابل‌ملاحظـه‌ای آن‌هـا را تعدیل کرد. به‌عنوان قاعده‌ای کلی می‌توان گفت اگر شرایط بازار به‌طور نسبی ثابت باشـد، این رویکردها خوب کار می‌کنند. به هرحال این رویکردها محدودیت‌های مربوط به خود را دارند و تکمیل آن‌ها با دیگر رویکردها ایدهٔ خوبی به‌نظر می‌رسد.

منابع

1. Boudoukh, J., Richrdson, M., Whitelaw, R. (1998), "The best of both worlds: A hybrid approach to calculating value at risk," *Risk11*, pp. 64-67.
2. Bowman, A.W. (1984), "An alternative method of cross-validation for the smoothing of density estimates," *Biometrika*, V0l.71. pp.353-360.
3. Buja, A. and Tukey, P.A., eds. (1991), *Computing and Graphics in Statistics*, Springer-Verlag Inc., New York.
4. Hall, P., Sheather, S.J., Jones, M.C. and Marron, J.S. (1991), "On optimal data-based bandwidth selection in kernel density estimation", *Biometrika*, Vol. 78, pp. 263-270.
5. Jones, M.C., Marron, J.S., and Sheather, S.J. (1996), "A brief survey of bandwidth selection for density estimation," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 91, pp. 401-407.
6. Minnotte, M. C. and Scott, D. W. (1993), "The mode tree: A tool for visualization of nonparametric density features," *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Vol. 2, pp. 51-68.
7. Pritsker, M. (2001), *The hidden dangers of historical simulation*, Board of Governors of Federal Reserve System.
8. Rudemo, M. (1982), "Empirical Choice of histograms and kernel density estimators," *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 9, pp. 65-78.
9. Sain, S. R., Baggerly, K. A., and Scott, D. W. (1994), "cross-validation of multivariate densities," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 89, pp. 807-817.
10. Wand, M. P. and Jones, M.C. (1995), *Kernel Smoothing*, Chapman & Hall Ltd.

11. Yatchew, A. and Harddle, W. (2006), "Nonparametric state price density estimation using constrained least squares and the bootstrap," *Journal of Econometrics*, Vol. 133, pp. 579-599.

فصل هشتم

رویکردهای نیمه‌پارامتریک

مقدمه

در فصل‌های قبل به‌ترتیب رویکردهای پارامتریک و ناپارامتریک جهت تخمین VaR مورد بررسی قرار گرفت. برخی از رویکردها نیز در ادبیات ریسک مطرح است که نه کـاملاً در حیطهٔ آمار پارامتریک قرار می‌گیرد و نه می‌توان آن‌ها را جزء رویکردهـای ناپارامتریـک تلقی نمود. این رویکردها برخی از ویژگی‌های هر دو گروه را داراست. بنـابراین آن‌هـا را در این فصل تحت عنوان رویکردهای نیمه‌پارامتریک ارایه می‌کنیم.

رویکردها

در رویکردهای نیمه‌پارامتریک سعی بر این اسـت تـا برخـی مشـکلات موجـود در راه محاسبهٔ سنجه‌های ریسک با ترکیب ویژگی‌های مربوط بـه هـر دو رویکـرد پارامتریـک و ناپارامتریک کاهش یابد. برخی از معروف‌ترین رویکرهای نیمه‌پارامتریک عبارتنداز:

- شبیه‌سازی تاریخی موزون
- شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده
- شبیه‌سازی تاریخی با استفاده از تخمین چگالی ناپارامتریک
- شبکهٔ عصبی

اغلب این رویکردها شکل بهبودیافتهٔ رویکردهای پارامتریک یا ناپارامتریک است. به‌عنوان مثال، شبیه‌سازی تاریخی موزون تلاشی در جهت بهبود شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی از طریق اختصاص وزن به داده‌هاست؛ شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده نیز از ترکیب روش ناپارامتریک بوت‌استرپ و یک رویکرد پارامتریک تلاطم تصادفی مانند $AGARCH$ حاصل می‌شود.

در ادامه، به بررسی رویکردهای نیمه‌پارامتریک مدل‌سازی ریسک می‌پردازیم.

شبیه‌سازی تاریخی موزون

در فصل قبل شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با زمان تشریح گردید. در این‌جا دو مدل شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با تلاطم و شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با همبستگی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با تلاطم[1]

این امکان وجود دارد که داده‌ها را بر اساس تلاطم موزون کرد. ایدهٔ اولیهٔ این روش توسط هال و وایت ارایه شد[2] که بر اساس آن، بازده برای احتساب تغییرات نهایی در تلاطم به‌روز می‌شود. به‌عنوان مثال اگر تلاطم جاری در یک بازار ۱/۵ درصد در روز باشد و تلاطم‌های روزانهٔ ماه گذشته تنها ۱ درصد باشد، داده‌های ماه گذشته ریسک فردا را دست‌پایین برآورد می‌کند. از طرفی دیگر، اگر تلاطم روزانهٔ ماه گذشته ۲ درصد باشد، داده‌های ماه گذشته تغییرات موردانتظار فردا را دست‌بالا برآورد می‌کند. به عبارتی دیگر، داده‌های تاریخی ریسک فردا را بیش از مقدار واقعی تخمین می‌زند. بنابراین می‌توان بازدهٔ تاریخی را به‌گونه‌ای تعدیل کرد که اعتقاد بازار را در مورد چگونگی تلاطم‌های آینده منعکس نماید.

تصور کنید که می‌خواهیم ارزش درمعرض‌ریسک را در روز T پیش‌بینی کنیم. r_{it} را بازدهٔ تاریخی دارایی i در روز t تلقی کنید. σ_{it} را نیز پیش‌بینی تاریخی تلاطم دارایی i برای

1. volatility-weighted historical simulation
2. Hull and White (1998).

روز t بر اساس روش $GARCH$ یا $EWMA$ در نظر بگیرید. این پیش‌بینی در پایـان روز $t\text{-}1$ حاصل شده است. اگر σ_{iT} آخرین پیش‌بینی از تلاطم دارایی i باشد، می‌توان به‌ترتیب زیر بازده‌های موجود در مجموعهٔ داده‌ها (r_{it}) را با بازده‌های تعدیل‌شده با تلاطم جـایگزین کرد:

$$r_{it}^{*} = \left(\frac{\sigma_{iT}}{\sigma_{it}}\right) r_{it} \qquad (۱-۸)$$

بدین‌ترتیب، بازدهٔ واقعی دورهٔ t با توجه به این‌که آیا پیش‌بینی‌هـای جـاری از تلاطـم بیشتر یا کمتر از تلاطم تخمینی برای دورهٔ t اسـت، افـزایش یـا کـاهش می‌یابـد. پـس از جایگزینی بازدهٔ تعدیل‌شده با بـازدهٔ واقعـی، بـرای محاسـبهٔ VaR یـا ES بایـد بـه شـیوهٔ شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی عمل کرد.

این رویکرد نسبت به رویکردهای شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی و موزون‌شده بـا زمـان دارای مزیت‌هایی به شرح زیر است:

- این روش، تغییرات تلاطم را به‌طریقی طبیعی و مستقیم به حساب می‌آورد در حالی‌که شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی و موزون‌شده با زمان، تغییرات تلاطم را نادیده می‌گیرنـد و رویکرد موزون‌شده با زمان، با تغییرات تلاطم به‌شیوه‌ای اختیاری و محدود برخـورد می‌نماید.
- ایـن روش، برآوردهـایی از ریسـک ارایـه می‌دهـد کـه بـه‌طرز مناسـبی نسـبت بـه تخمین‌های جاری تلاطم حساس است و ما را در جهت ترکیب اطلاعـات حاصـل از پیش‌بینی‌های $GARCH$ با برآوردهایی از VaR و ES کـه بـر اسـاس شبیه‌سـازی تاریخی است، توانمند می‌نماید.
- تخمین‌های VaR و ES با این روش ممکن است فراتر از حداکثر زیانی باشد کـه در مجموعهٔ داده‌های تـاریخی موجـود اسـت. بـدین‌ترتیب کـه در دوره‌هـای پـرتلاطم، بازده‌های تاریخی مقادیر بیشتری به خود می‌گیرند و در نتیجـه سـری سـود و زیـان شبیه‌سازی‌شدهٔ تاریخی در رویکرد هال–وایت مقادیری اختیار می‌کننـد کـه فراتـر از زیان‌های تاریخی واقعی است. در نتیجه ایـن روش نسـبت بـه شبیه‌سـازی تـاریخی

مقدماتی مزیت دارد، زیرا شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی مانع از این می‌شود کـه VaR یا ES از زیان‌های تاریخی موجود در مجموعهٔ داده‌های تاریخی فراتر رود.

- شواهد تجربی کاربرد رویکرد هال–وایت حاکی از این است که این رویکرد نسبت بـه شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با زمان تخمین‌های بهتری از VaR ارایه می‌نماید.
- هم‌چنین می‌توان رویکرد هال وایت را به طرق گوناگون بسط داد. به‌عنوان مثال اگـر به‌دنبال افزایش حساسیت تخمین‌های ریسک نسبت بـه زیان‌هـای بـزرگ هسـتیم، می‌توان آن را با رویکرد موزون‌شده با زمان ترکیب کرد. هم‌چنین می‌توان این رویکرد را با روش بوت‌استرپ جهت برآورد فواصل اطمینان برای VaR و ES ترکیب نمـود. نحوهٔ ایجاد فواصل اطمینان برای برآوردهای VaR و ES در فصل هفتم تشریح شد.

شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با همبستگی[1]

این امکان وجود دارد که بازدهٔ تاریخی را جهت احتساب تغییرات میان همبستگی‌های تاریخی و جاری تعدیل کرد. وزن‌دهی بر اساس همبستگی اندکی مشکل‌تر از وزن‌دهی بـر اساس تلاطم است. برای درک دلیل این مسأله در نظر داشته باشید که همانند تعدیل بازدهٔ تاریخی بر اساس تلاطم، در این‌جا به‌دنبال تعدیل ایـن بـازده جهـت انعکـاس تغییـرات در همبستگی‌های آن هستیم.

فرض کنید سبدی حاوی m موقعیت است. $\mathbf{R}$ بردار بازدهٔ تاریخی و یا بازدهٔ تعدیل‌شده با تلاطم برای دورهٔ t است؛ $\mathbf{R}$ بـرداری $m\times1$ اسـت کـه منعکس‌کننـدهٔ یـک مـاتریس واریانس–کوواریانس $m\times m$ یعنی Σ می‌باشد. Σ را می‌توان به حاصل‌ضرب زیر تجزیـه کرد:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}} \qquad (۲-۸)$$

که $\boldsymbol{\sigma}$ ماتریس قطری تلاطم‌هاست. به عبارتی دیگر، «i»امین عنصر موجـود در قطـر اصلی این ماتریس، تلاطم دارایی «i»ام و عناصر خارج از قطر اصلی، صفر اسـت؛ $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}}$ نیـز ترانهادهٔ آن می‌باشد. $\mathbf{C}$ ماتریسی $m\times m$ و حاوی همبستگی‌های تـاریخی اسـت. بـدین ترتیب، بردار بازدهٔ تاریخی ($\mathbf{R}$) منعکس‌کنندهٔ ماتریس همبستگی تاریخی $\mathbf{C}$ می‌باشد و ما

1. correlation-weighted historical simulation

به‌دنبال این هستیم که $\mathbf{R}$ را به‌گونه‌ای تعدیل کنیم که به $\overline{\mathbf{R}}$ تبدیل شده و منعکس‌کنندهٔ ماتریس همبستگی جاری یعنی $\overline{\mathbf{C}}$ باشد. جهت سادگی تصور کنید که هر دو ماتریس همبستگی، همیشه مثبت است. این بدان معناست که هر ماتریس همبستگی دارای یک «ریشهٔ دوم ماتریس»[1] با ابعاد $m \times m$ می‌باشد. ما ریشهٔ دوم ماتریس‌های $\mathbf{C}$ و $\overline{\mathbf{C}}$ را به‌ترتیب با $\mathbf{A}$ و $\overline{\mathbf{A}}$ نشان می‌دهیم. اما، چگونه می‌توان به ماتریس $\mathbf{A}$ و یا ماتریس $\overline{\mathbf{A}}$ دست یافت؟ پاسخ این سؤال در تجزیهٔ چولسکی[2] نهفته است.

چولسکی دریافت هر ماتریس متقارن و قطعاً مثبت را می‌توان به حاصل‌ضرب یک ماتریس پایین‌مثلثی و ترانهادهٔ این ماتریس پایین مثلثی تجزیه کرد. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \qquad (۸-۳)$$

که $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ ترانهادهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ است. اگر c_{ij} بیان‌گر درایهٔ سطر «i»ام و ستون «j»ام ماتریس $\mathbf{C}$ باشد، اعضای ماتریس $\mathbf{A}$ یعنی a_{ij} را توسط روابط زیر تعیین می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sqrt{c_{11}} \\
a_{j1} &= \frac{c_{j1}}{a_{11}} \quad for \;\; j = 2,\ldots,n \\
a_{jj} &= \sqrt{c_{jj} - \sum_{s=1}^{j-1} a_{js}^2} \quad for \;\; j = 2,\ldots,n \\
a_{pj} &= \frac{1}{a_{jj}}\left(c_{pj} - \sum_{s=1}^{j-1} a_{js} a_{ps}\right) \quad for \;\; p = j+1,\ldots,n; j \geq 2
\end{aligned} \qquad (۸-۴)$$

مثال(۸-۱): تجزیهٔ چولسکی

ماتریس واریانس-کوواریانس $\mathbf{C}$ را در نظر بگیرید:

---

1. matrix square root
2. Choleski decomposition

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.156 & 0.048 & 0.022 \\ 0.048 & 0.146 & 0147 \\ 0.022 & 0.147 & 0.461 \end{pmatrix}$$

بر اساس روابطی که بیان شد، اعضای ماتریس $\mathbf{A}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sqrt{0.156} = 0.395 \\
a_{21} &= \frac{0.048}{0.395} = 0.122 \\
a_{31} &= \frac{0.022}{0.395} = 0.057 \\
a_{22} &= \sqrt{0.146 - 0.122^2} = 0.362 \\
a_{32} &= \frac{1}{0.362}(0.147 - 0.122 \times 0.057) = 0.386 \\
a_{33} &= \sqrt{0.461 - 0.057^2 - 0.386^2} = 0.556
\end{aligned}$$

بنابراین ماتریس $\mathbf{A}$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.395 & 0 & 0 \\ 0.122 & 0.362 & 0 \\ 0.057 & 0.386 & 0.556 \end{pmatrix}$$

بدیهی است که حاصل‌ضرب این ماتریس در ترانهاده‌اش برابر ماتریس $\mathbf{C}$ است.

پس از استخراج ماتریس $\mathbf{A}$ و $\overline{\mathbf{A}}$ می‌توانیم $\mathbf{R}$ و $\overline{\mathbf{R}}$ را به‌صورت حاصل‌ضرب ماتریس‌های چولسکی مربوطه و یک فرآیند اخلال ناهمبسته[1] یعنی ε بنویسیم:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\varepsilon \qquad (۵-۸)$$

$$\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{A}}\varepsilon \qquad (۶-۸)$$

برای استخراج ε می‌توان رابطهٔ (۸-۵) را معکوس کرد:

1. uncorrelated noise process

$$\varepsilon = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R} \qquad (۸–۷)$$

حال برای دستیابی به سری بازدهٔ تعدیل‌شده بـا همبسـتگی ($\overline{\mathbf{R}}$)، رابطـهٔ (۸–۷) را در رابطهٔ (۸–۶) جایگذاری می‌کنیم:

$$\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R} \qquad (۸–۸)$$

بازدهی که به این صورت تعدیل می‌شود، ماتریس همبسـتگی جـاری یعنـی $\overline{\mathbf{C}}$ و یـا به‌طور کلی‌تر ماتریس واریانس–کوواریانس جاری ($\overline{\Sigma}$) را در خـود جـای داده اسـت. ایـن رویکرد، تعمیم رویکرد هال–وایت می‌باشد، چراکه سیستم وزن‌دهی آن، هم همبستگی‌ها و هم تلاطم‌ها را به حساب می‌آورد.

مثال (۸–۲): شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با همبستگی

تصور کنید تنها دو موقعیت در سبد خود داریم و بنابراین، $m = 2$. همبستگی تـاریخی بین دو موقعیت ۰/۳ و همبستگی جاری ۰/۹ است. ما می‌خواهیم بردار بازدهٔ تـاریخی ($\mathbf{R}$) را به‌گونه‌ای تعدیل کنیم که همبستگی جاری را در خود انعکاس دهد.

بنابر روابط تجزیهٔ چولسکی، اعضای ماتریس $\mathbf{A}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{11} = 1 \quad a_{12} = 0 \quad a_{21} = 0.3 \quad a_{22} = \sqrt{1-0.3^2}$$

ماتریس $\overline{\mathbf{A}}$ را نیز بر اساس روابط تجزیهٔ چولسکی محاسبه می‌کنیم. اگـر درایـه‌های $\overline{\mathbf{A}}$ را با $\overline{a}_{ij}$ نشان دهیم خواهیم داشت:

$$\overline{a}_{11} = 1 \quad \overline{a}_{12} = 0 \quad \overline{a}_{21} = 0.9 \quad \overline{a}_{22} = \sqrt{1-0.9^2}$$

بدین ترتیب ماتریس بازده‌های تعدیل‌شده را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{R} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.9 & \sqrt{1-0.9^2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-0.3^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-0.3^2} & 0 \\ -0.3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.7629 & 0.4569 \end{pmatrix} \mathbf{R}\end{aligned}$$

بدیهی است که پس از دستیابی به بازدۀ تعدیل‌شده، برای محاسبۀ VaR یا ES به‌شیوه شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی عمل کنیم.

شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده[1]

شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده روش نویدبخش دیگری است. این رویکرد نوعی بوت‌استرپ نیمه‌پارامتریک است که به‌دنبال ترکیب مزایای شبیه‌سازی تاریخی با قدرت و انعطاف‌پذیری مدل‌های تلاطم شرطی مانند $GARCH$ می‌باشد. در این رویکرد عملیات بوت‌استرپ بر روی یک مدل تلاطم شرطی پیاده می‌شود. بوت‌استرپ به‌عنوان بخش ناپارامتریک و مدل تلاطم قسمت پارامتریک آن می‌باشد.

تصور کنید از رویکرد FHS جهت برآورد ارزش درمعرض‌ریسک دارایی در دورۀ نگهداری یک‌روزه استفاده می‌کنیم. اولین گام در FHS، برازش یک مدل تلاطم مانند $GARCH$ بر بازدۀ دارایی است. ما به‌دنبال مدلی هستیم که ویژگی‌های کلیدی داده‌ها را در نظر بگیرد. بارون–آدسی و همکارانش مدل خودرگرسیونی‌مشروط‌برناهمسانی‌واریانس تعمیم‌یافتۀ نامتقارن یا $AGARCH$ را برای این منظور پیشنهاد می‌کنند.[2] این مدل نه تنها تغییرات مشروط تلاطم، خوشه‌بندی تلاطم و مانند این‌ها را در خود جای می‌دهد، بلکه به‌گونه‌ای طراحی شده که امکان بررسی جداگانۀ اثرات خطاهای مثبت و منفی را بر تلاطم‌ها فراهم می‌آورد. $AGARCH$ فرض را بر این می‌گیرد که بازدۀ دارایی از فرآیند زیر تبعیت می‌کند:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \tag{۹-۸}$$

در این رابطه، بازدۀ روزانه حاصل‌جمع میانگین بازدۀ روزانه و خطای تصادفی (ε_t) می‌باشد که همان مدل گشت تصادفی است. تلاطم در رابطۀ فوق، مجموع یک عدد ثابت (ω) و جملاتی است که منعکس‌کنندۀ خطای دورۀ قبل و تلاطم دورۀ قبل می‌باشد. γ

1. filtered historical simulation (FHS)
2. Barone-Adesi et al, (2000).

اجازه می‌دهد که جملهٔ خطا اثری نامتقارن بر تلاطم داشته باشد. I تابع معرف است که برای خطاهای منفی مقدار یک و در غیر این‌صورت صفر می‌گیرد این مدل، نسخه‌ای از $TGARCH$ است که در فصل چهارم به تشریح آن پرداختیم.

گام بعدی استفاده از این مدل جهت پیش‌بینی تلاطم برای تمامی روزهای موجود در نمونه است. سپس، بازده‌های واقعی را بر این پیش‌بینی‌های تلاطم تقسیم می‌کنیم تا به مجموعه‌ای از بازده‌های استانداردشده دست یابیم. انتظار داریم که این بازده‌های استانداردشده به‌صورت یکسان و مستقل از هم توزیع شده باشند و بنابراین برای شبیه‌سازی تاریخی مناسب است.

جهت دست‌یابی به ارزش درمعرض‌ریسک یک‌روزه گام بعدی شامل پیاده سازی عملیات بوت‌استرپ روی این مجموعه از بازده‌های استانداردشده می‌باشد. طی این عملیات به‌طور تصادفی تعداد زیادی انتخاب از بازده‌های این مجموعه به‌عمل می‌آوریم و با مجموعهٔ این بازده‌های منتخب به‌عنوان یک نمونه رفتار می‌کنیم. البته، این فرآیند نمونه‌برداری با جایگذاری است و برای انتخاب هر بازده، بازدهٔ قبلی را به مجموعهٔ اولیه بازمی‌گردانیم. سپس هرکدام از انتخاب‌های تصادفی را در پیش‌بینی $AGARCH$ از تلاطم فردا ضرب می‌کنیم. اگر M انتخاب داشته باشیم، حالا دارای M بازدهٔ شبیه‌سازی‌شده هستیم که هرکدام منعکس‌کنندهٔ شرایط کنونی بازار است، چراکه همگی در پیش‌بینی امروز از تلاطم فردا ضرب شده‌اند.

در نهایت، این بازده‌های شبیه‌سازی‌شده، تخمینی از توزیع احتمال بازدهٔ دارایی در پایان روز آتی به‌دست می‌دهد. حال می‌توان بازدهٔ بحرانی را محاسبه نموده و VaR را در سطح اطمینان موردنظر محاسبه کرد.

به‌راحتی می‌توان این رویه را جهت برآورد ارزش درمعرض‌ریسک سبد دارایی و یا برای دورهٔ نگهداری طولانی‌تر تعدیل کرد. اگر سبدی از دارایی‌ها داشته باشیم، می‌توانیم یک فرآیند چندمتغیرهٔ $GARCH$ یا $AGARCH$ را بر بردار بازدهٔ دارایی‌ها برازش کنیم و سپس بردار بازدهٔ دارایی‌ها را استاندارد نماییم. سپس، عملیات بوت‌استرپ را پیاده می‌کنیم. در این‌جا بوت‌استرپ نه‌تنها بازدهٔ استانداردشدهٔ سبد دارایی بلکه بردار استاندارد بازدهٔ دارایی‌ها را انتخاب می‌کند. این بسیار مهم است، چراکه که شبیه‌سازی‌ها ساختار همبستگی موجود در بازدهٔ خام را حفظ می‌کنند. بدین ترتیب بوت‌استرپ بدون این‌که ما را مجبور به

تعیین تابع چگالی احتمال چندمتغیره برای بازدهٔ دارایی‌ها کند، همبستگی‌های موجود را حفظ می‌نماید.

رویکرد شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده دارای جذابیت‌هایی به شرح زیر است:

- این رویکرد حتی برای سبدهای بزرگ دارایی به‌سرعت قابل‌اجراست.
- همانند رویکرد هال–وایت، FHS تخمین‌هایی از VaR و ES ارایه می‌دهد که ممکن است فراتر از حداکثر زیان تاریخی موجود در مجموعهٔ داده‌ها باشد.
- این رویکرد بدون نیاز به آگاهی از ماتریس واریانس–کوواریانس و یا توزیع شرطی بازدهٔ دارایی‌ها، ساختار همبستگی را در بازده حفظ می‌کند.
- این رویکرد اجازه می‌دهد که جذابیت‌های ناپارامتریک شبیه‌سازی تاریخی با مدل‌های پیشرفتهٔ تلاطم مانند $GARCH$ ترکیب شود و بدین ترتیب شرایط متغیر تلاطم‌های بازار به‌حساب آورده شود.
- این رویکرد را می‌توان جهت احتساب خودهمبستگی یا همبستگی تاریخی میان بازدهٔ دارایی‌ها تعدیل کرد.
- این رویکرد را می‌توان بوسیله رویکرد آمارهٔ ترتیبی[1] یا بوت‌استرپ جهت ایجاد برآوردهایی از فواصل اطمینان VaR یا ES بهبود بخشید.
- شواهدی وجود دارد که گویای کارکرد خوب FHS می‌باشد.

تخمین چگالی ناپارامتریک

در فصل پیش تخمین چگالی ناپارامتریک را با استفاده از هیستوگرام و برآوردکنندهٔ ساده مورد بررسی قرار دادیم و به معرفی برآوردکنندهٔ کرنل پرداختیم. رابطهٔ محاسبهٔ چگالی احتمال برآوردکنندهٔ کرنل عبارت است از:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K(u) \quad (۱۰-۸)$$

1. order statistic (OS)

در فصل پیش هم‌چنین برخی توابع کرنل را از نظر گذراندیم. در این‌جا می‌خواهیم به بررسی یکی دیگر از توابع کرنل بپردازیم که در حیطهٔ آمار نیمه‌پارامتریک قرار می‌گیرد. این تابع، کرنلِ نرمال است و رابطهٔ آن چیزی غیر از تابع چگالی نرمال نیست.

$$K(x) = (2\pi h^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-x_i)^2}{2h}\right) \quad (۱۱-۸)$$

در تابع کرنل نرمال، نقطهٔ موردنظر به‌عنوان میانگین مشاهدات و عرض بند (h) نیز به‌عنوان انحراف‌معیار مشاهدات در نظر گرفته می‌شود. با افزایش فاصلهٔ مشاهدات از نقطهٔ موردنظر، چگالی احتمال نرمال کاهش می‌یابد و در نتیجه وزن مشاهدات در تعیین چگالی نقطهٔ موردنظر نیز کاهش می‌یابد. بنابراین، اگر تراکم مشاهدات در اطراف نقطهٔ موردنظر زیاد باشد، چگالی آن نقطه به‌طور نسبی بیشتر و اگر آن نقطه در منطقهٔ کم‌تراکمی واقع شود، چگالی آن نسبتاً کمتر خواهد شد. رابطهٔ (۸-۱۱) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$K(u) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad (۱۲-۸)$$

توابع کرنل در حیطهٔ آمار نیمه‌پارامتریک نیز بسیار متنوع است چراکه، تقریباً تمامی توابع چگالی احتمال متقارن را می‌توان به‌عنوان تابع کرنل درنظر گرفت.

مسألهٔ انتخاب تابع کرنل و عرض بند

ساخت برآوردکنندهٔ چگالی کرنل مستلزم انتخاب دو پارامتر است:

- تابع کرنل: به‌لحاظ نظری و تجربی می‌توان نشان داد که انتخاب تابع کرنل چندان مهم نیست. در نتیجه تابع کرنل اغلب بر اساس ملاحظات محاسباتی انتخاب می‌شود.
- عرض بند: انتخاب عرض بند بسیار حائز اهمیت است. در واقع ویژگی‌های نظری برآوردکننده‌های کرنل، بر اساس انتخاب عرض بند مشخص می‌شود.

در انتخاب تابع کرنل و عرض بند، هدف ما یافتن برآوردکننده‌ای ($\hat{f}$) است که به تابع چگالی واقعی ولی ناشناخته (f) نزدیک باشد. بدیهی‌ترین معیار برای دقت برازش در نقطهٔ x، میانگین مجذور خطاست.

$$\begin{aligned} MSE_x(\hat{f}(x)) &= (\hat{f}(x) - f(x))^2 \\ &= (E\,\hat{f}(x) - f(x))^2 + \operatorname{var}(\hat{f}(x)) \qquad (۱۳\text{-}۸) \\ &= (bias(\hat{f}(x))^2 + \operatorname{var}(\hat{f}(x)) \end{aligned}$$

بنابراین میانگین مجذور خطا حاصل‌جمع مجذور تورش[1] و واریانس است. به‌جای محاسبهٔ میانگین مجذور خطا در نقطهٔ x می‌توانیم با تجمیع میانگین مجذور خطا برای تمامی مقادیر x به معیار عمومی دقت برازشِ $\hat{f}(x)$ نسبت به $f(x)$ دست یابیم. این معیار، میانگین مجذور خطای تجمیع‌یافته[2] است.

$$\begin{aligned} MISE(\hat{f}(x)) &= E\int(\hat{f}(x) - f(x))^2 \\ &= \int(E\,\hat{f}(x) - f(x))^2\,dx + \int \operatorname{var}(\hat{f}(x))dx \end{aligned} \qquad (۱۴\text{-}۸)$$

بنابراین $MISE$ حاصل‌جمع مجذور تورش تجمیع‌یافته و واریانس تجمیع‌یافته است. تابعی که میانگین مجذور خطای تجمیع‌یافته را کمینه سازد، تابع کرنل بهینه است. می‌توان ثابت کرد که تابع کرنل بهینه، اپانچنیکوف است.

مسأله انتخاب عرض بند پس از انتخاب تابع کرنل مورد بررسی قرار می‌گیرد. ساده‌ترین راه‌حل، انتخاب h بر اساس آزمون و خطاست. در این روش برآوردهای کرنل را به ازای مقادیر مختلف عرض بند ترسیم کرده و مقداری را انتخاب می‌کنیم که به‌نظر بهترین برازش را برای داده‌های مورد بررسی ایجاد می‌نماید. با این حال امکان انتخاب h به روش تحلیلی نیز وجود دارد. بر اساس روابط (۸-۱۳) و (۸-۱۴) می‌توان گفت که انتخاب h مستلزم برقراری موازنه‌ای بین تورش و واریانس است. اگر h خیلی کوچک انتخاب شود، تورش کاهش می‌یابد، اما واریانس به‌خاطر کاهش حجم نمونه افزایش

---

1. bias
2. mean integrated square error (MISE)

می‌یابد. اگر h خیلی بزرگ انتخاب شود، تورش بزرگ می‌شود، چراکه افزایش h باعث افزایش دخالت نقاط دورتر و احتمالاً نامربوط‌تر در تعیین چگالی یک نقطهٔ خاص می‌شود. افزایش h در عین حال به‌علت افزایش حجم نمونه باعث کاهش واریانس می‌شود. عرض بند بهینه مقداری است که به ازای آن میانگین مجذور خطای تجمیع‌یافته کمینه گردد. برای این کار کافی است که مشتق $MISE$ را نسبت به h برابر صفر قرار دهیم. به‌عنوان مثال اگر از تابع کرنل نرمال استفاده کنیم، عرض بند بهینه برابر است با:

$$h_{opt} = 1.06\sigma n^{-1/5} \quad (۱۵-۸)$$

که n تعداد مشاهدات و σ انحراف‌معیار مشاهدات است. این رابطه به ما امکان می‌دهد که عرض بند بهینه را به‌طور مستقیم با استفاده از برآورد انحراف‌معیار تخمین بزنیم. این عرض بند در صورتی بهینه است که داده‌ها به‌صورت نرمال توزیع شده باشد. چنین عرض بندی ممکن است باعث هموارسازی بیش از حد[1] داده‌های غیرنرمال گردد. سیلورمن جهت جبران این مشکل، عرض بند تعدیل‌شده را پیشنهاد می‌دهد:[2]

$$h = 1.06 A n^{-1/5} \quad (۱۶-۸)$$

که A به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = minimum[\sigma, interquartile\ range/1.34] \quad (۱۷-۸)$$

یعنی A حداقل یکی از دو مقدار انحراف‌معیار و دامنهٔ میان‌چارکی[3] تقسیم بر ۱/۳۴ است. دامنهٔ میان‌چارکی از طریق تفاضل چارک اول و سوم به‌دست می‌آید. عرض بند حاصل از رابطهٔ (۸-۱۷)، برای طیف وسیعی از توزیع‌ها، برازش نزدیکی فراهم می‌آورد.

محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک

برای محاسبهٔ VaR کافی است که بازدهٔ بحرانی را از طریق صدک آلفای بازده محاسبه کنیم. در این‌جا با ارایهٔ مثالی نحوهٔ محاسبهٔ VaR را تشریح می‌کنیم.

---

1. over smoothing
2. Silverman (1986).
3. interquartile range

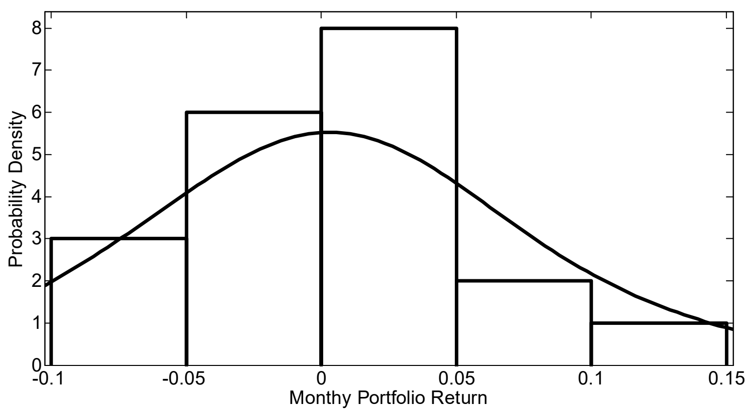
مثال (۸–۳): محاسبهٔ VaR بر اساس برآوردکنندهٔ کرنل نرمال

برای افزایش مقایسه‌پذیری میان توابع کرنل در این‌جا باز هم از داده‌های مثال (۷–۱) استفاده می‌کنیم. این داده‌ها مجدداً درجدول زیر ارایه شده است.

شماره	بازده	شماره	بازده	شماره	بازده	شماره	بازده
۱	−۱۰/۰	۶	−۲/۰	۱۱	۰/۵	۱۶	۳/۴
۲	−۸/۰	۷	−۱/۰	۱۲	۱/۰	۱۷	۴/۵
۳	−۷/۵	۸	−۰/۷	۱۳	۱/۳	۱۸	۷/۵
۴	−۴/۰	۹	−۰/۶	۱۴	۲/۸	۱۹	۹/۵
۵	−۲/۵	۱۰	۰/۰	۱۵	۳/۰	۲۰	۱۴/۰

جدول (۸–۱): سری بازدهٔ ماهانهٔ یک سبد فرضی به درصد

نمودار زیر، تابع چگالی احتمال برآوردکنندهٔ کرنلِ نرمال برای داده‌های جدول فوق است.



نمودار (۸–۱): چگالی احتمال برآوردکنندهٔ کرنل نرمال برای بازدهٔ ماهانهٔ سبد فرضی با عرض بند ۰/۰۵

در این مثال عرض بند را ۰/۰۵ درنظر گرفته‌ایم. جدول صفحهٔ بعد حاوی برخی اطلاعات مربوط به دنبالهٔ سمت چپ نمودار چگالی فوق است.

بازده (٪)	چگالی احتمال	چگالی تجمعی	احتمال تجمعی (٪)
X<-۲۰	...	۰/۱۹۴	۰/۱۵۵
−۲۰/۰	۰/۰۹۹	۰/۲۹۳	۰/۲۳۴
−۱۹/۲	۰/۱۴۰	۰/۴۳۳	۰/۳۴۷
−۱۸/۴	۰/۱۹۵	۰/۶۲۸	۰/۵۰۲
−۱۷/۶	۰/۲۶۴	۰/۸۹۲	۰/۷۱۴
−۱۶/۸	۰/۳۵۲	۱/۲۴۴	۰/۹۵۵
−۱۶/۰	۰/۴۵۹	۱/۷۰۳	۱/۳۶۲
−۱۵/۲	۰/۵۸۷	۲/۲۹۰	۱/۸۳۲
−۱۴/۴	۰/۷۳۸	۳/۰۲۸	۲/۴۲۲
−۱۳/۶	۰/۹۱۲	۳/۹۴۰	۳/۱۵۲
−۱۲/۸	۱/۱۱۰	۵/۰۵۰	۴/۰۴۰
−۱۲/۰	۱/۳۳۱	۶/۳۸۰	۵/۱۰۴

جدول (۸−۲): مشخصات دنبالهٔ سمت چپ نمودار (۸−۱) برای بازده‌هایی به فاصلهٔ ۰/۰۰۸ به

در این‌جا چگالی احتمال تخمینی بر اساس رابطهٔ (۸−۱۰) با تابع کرنل نرمال به‌دست آمده است. به‌عنوان مثال، چگالی بازدهٔ ۱۶٪− برابر است با:

$$\hat{f}(-16\%)=\frac{1}{20\times0.05}\times\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{1}{2}\left(\frac{-0.16+0.1}{0.05}\right)^2+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{1}{2}\left(\frac{-0.16-0.14}{0.05}\right)^2\right]=0.459$$

ستون آخر شامل احتمال تجمعی تخمینی است. مقادیر این ستون بر اساس رابطهٔ (۷−۱۸) به‌دست آمده است. چگالی احتمال برای بازده‌هایی به فاصلهٔ ۰/۰۰۸ محاسبه شده است. این فاصله برای به‌دست آوردن مقدار تقریبی سطح زیر منحنی در نمودار (۸−۱) اندکی بزرگ است. به همین دلیل مقادیر ستون آخر، تقریب‌های چندان دقیقی از احتمال تجمعی فراهم نمی‌آورد. اگر فواصل کاهش یابد، به‌طور بالقوه امکان بهبود تقریب‌ها فراهم می‌آید.

برای محاسبهٔ VaR باید صدک آلفای بازده را محاسبه کنیم. این صدک معادل معکوس تابع توزیع تجمعی تخمینی در سطح احتمال آلفاست. بر اساس جدول (۸-۲) صدک بازده برای احتمال ۱ درصد، بین بازده‌های ۱۶/۸٪- و ۱۶٪- و برای احتمال ۵ درصد، بین بازده‌های ۱۲/۸٪- و ۱۲٪- قرار می‌گیرد. با یک تناسب ساده صدک اول و پنجم برابر است با:

$$q_r(0.01) = F^{-1}(0.01) = -0.1679$$
$$q_r(0.05) = F^{-1}(0.05) = -0.1208$$

اگر قیمت جاری سبد دارایی ۱،۰۰۰ تومان باشد، VaR در سطوح اطمینان ۹۵٪ و ۹۹٪ برابر است با:

$$1-\alpha = \%99 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.1679 = 167.9$$
$$1-\alpha = \%95 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.1208 = 120.8$$

در این مثال اگر عرض مستطیل‌ها (فواصل) را ۰/۰۰۰۱ درنظر بگیریم، صدک اول و پنجم به‌ترتیب برابر ۱۶/۳۴٪- و ۱۱/۶۸٪- می‌شود که تقریب بسیار دقیقی است. VaR بر اساس این صدک‌ها برابر است با:

$$1-\alpha = \%99 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.16.34 = 163.4$$
$$1-\alpha = \%95 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.11.68 = 116.8$$

اختلاف بین برآوردهای VaR پس از بهبود تقریب‌ها، ناچیز به‌نظر می‌رسد، اما با افزایش قیمت سبد دارایی همین اختلاف ناچیز قابل‌ملاحظه خواهد شد.

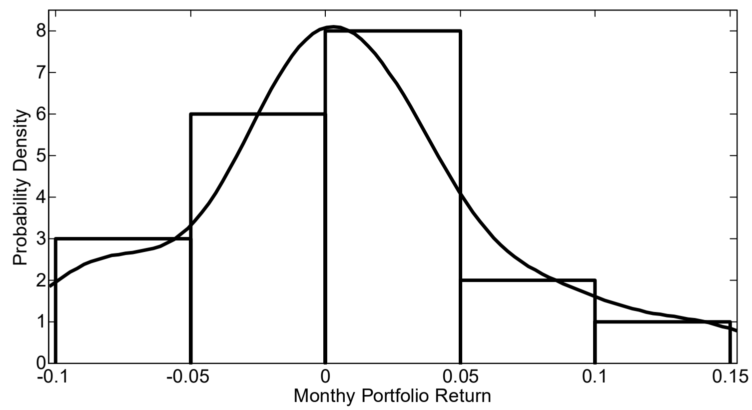
در مثال (۸-۳) ما به‌طور اختیاری عرض بند را برابر ۰/۰۵ در نظر گرفتیم. نتیجه چنین انتخابی، هموارسازی بیش از حد چگالی احتمال و از دست‌دادن بخش مهمی از اطلاعات مفید است. در واقع در این مثال، عرض بند نسبتاً بزرگ انتخاب شده است. نمودار (۸-۱) به‌خوبی این گفته‌ها را تأیید می‌کند. در این‌جا می‌خواهیم با انتخاب مقدار بهینهٔ h، محاسبات مثال (۸-۳) را دوباره تکرار کنیم تا میزان تأثیرپذیری نتایج از پارامتر عرض بند را بررسی نماییم.

مثال (۸-۴): محاسبهٔ VaR بر اساس برآوردکنندهٔ کرنل نرمال با عرض بند بهینه

برای استخراج چگالی داده‌های جدول (۸-۲)، h را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که برازش نزدیکی بین تابع کرنل و توزیع ناشناخته فراهم آورد. بر اساس رابطهٔ (۸-۱۷) و (۸-۱۶) خواهیم داشت:

$$A = minimum(0.0579, 0.0545/1.34)$$
$$h = 1.06 \times 0.0407 \times 20^{(-1/5)} = 0.0237$$

چگالی احتمال، با عرض بندی معال ۰/۰۲۳۷ به شکل زیر است:



نمودار (۸-۲): چگالی احتمال برآوردکنندهٔ کرنل نرمال برای بازدهٔ ماهانهٔ سبد فرضی با عرض بند ۰/۰۲۳۷

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، برآوردکنندهٔ کرنل با عرض بند ۰/۰۲۳۷ برازش نسبتاً مناسبی را با هیستوگرام داده‌ها برقرار می‌کند.

اگر فواصل را ۰/۰۰۰۱ درنظر بگیریم، صدک اول و پنجم به‌ترتیب برابر ۱۲/۴۵٪- و ۹/۶۴٪- می‌شود که تقریب بسیار دقیقی است. VaR بر اساس این صدک‌ها برابر است با:

$$1-\alpha = \%99 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.1245 = 124.5$$
$$1-\alpha = \%95 \rightarrow VaR = -1000 \times -0.964 = 96.4$$

با مقایسهٔ برآوردهای VaR در این مثال و مثال (۸-۳) به این نتیجه می‌رسیم که انتخاب عرض بند به‌شدت بر نتایج اثرگذار است.

برآوردکننده‌های کرنل متغیر[1]

کاربرد برآوردکنندهٔ کرنل آسان است و ویژگی‌های آن نیز به‌خوبی قابل‌فهم می‌باشد، اما این برآوردکننده دارای مشکل قابل‌تأملی است. از آن‌جا که عرض بند برای کل نمونه ثابت است، برآوردکننده‌ای که درجهٔ مناسبی از هموارسازی را در بخش مرکزی توزیع فراهم می‌آورد، غالباً دنبالهٔ توزیع را با اخلال‌های هموارنشده‌ای رها می‌کند. چنین ناهمواری‌هایی قابلیت تعمیم‌پذیری نتایج را با مشکل مواجه می‌کند. اگر ما این اخلال‌ها را هموار کنیم، خطر هموارسازی بیش از حد بخش‌های مرکزی‌تر توزیع و نابودسازی اطلاعات مفید آن وجود دارد. به‌طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که داشتن دنباله‌های هموار بدون هموارسازی بیش از حد قسمت عمده‌ای از توزیع، مشکل است.

یک راه‌حل برای این مسأله، استفاده از برآوردکننده‌های انطباق‌پذیر[2] است که بر اساس آن عرض بند به چگونگی توزیع داده‌ها بستگی دارد. یکی از این روش‌ها بر اساس برآوردکنندهٔ کرنل متغیر می‌باشد. این برآوردکننده با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{h\,d_{j,k}}K\left(\frac{x-x_j}{h\,d_{j,k}}\right) \quad (۱۸–۸)$$

که $d_{j,k}$ فاصلهٔ x_j از «k»امین نزدیک‌ترین نقطه در مجموعهٔ داده‌هاست. نقش $d_{j,k}$ هموارترکردن کرنل در نواحی کم‌تراکم است. برای یک مقدار ثابت k، درجهٔ هموارسازی عمومی به پارامتر عرض بند بستگی دارد، اما میزان تعیین‌کنندگی عرض بند در هموارسازی محلی، توسط k مشخص می‌شود.

عملکرد نظری و تجربی برآوردکننده‌های کرنل

نظریهٔ تخمین چگالی[3] بر این باور است که روش کرنل نسبت به روش‌های شبیه‌سازی تاریخی تخمین‌های بهتری از VaR و ES ارایه می‌دهد، چراکه استفادهٔ بهتری از مجموعهٔ داده‌ها به‌عمل می‌آورد. رویکرد شبیه‌سازی مقدماتی چیزی غیر از تخمین

1. variable kernel estimators
2. adaptive estimators
3. density estimation theory

چگالی با استفاده از هیستوگرام نیست و ما می‌دانیم کـه هیسـتوگرام را بـه‌زحمت می‌تـوان به‌عنوان بهترین راه برای ادارهٔ مجموعهٔ داده‌ها درنظر گرفت.

همان‌گونه که در مثال‌های متعددی تشریح کردیم، برای تخمین VaR بـا اسـتفاده از کرنل، ابتدا تابع چگالی کرنل مناسبی را به داده‌ها برازش می‌کنیم و تابع توزیع تجمعی را بر اساس تابع چگالی کرنل بنا می‌کنیم. سپس جهت دست‌یابی به صـدک متنـاظر بـا VaR، تابع چگالی تجمعی را معکوس می‌کنیم.

مطالعاتی در مورد عملکرد واقعی برآوردکننده‌های کرنل توسط باتلر و اسـکتر صـورت گرفت.[1] آن‌ها رویکرد کرنل را برای سبدهای واقعی به‌کار گرفتند و به این نتیجـه رسـیدند که رویکردهای کرنل انطباق‌پذیر عموماً به مقادیر بزرگ‌تری از VaR منتهی می‌شود. آن‌ها متوجه شدند که انتخاب تابع کرنل اختلاف نسبتاً کمی در برآوردهای VaR ایجاد می‌کنـد. آن‌ها بر اساس مقایسهٔ تخمین‌ها با مقادیر تحقق‌یافته، تابع اپانچنیکوف انطباق‌پذیر[2] و تابع نرمال انطباق‌پذیر را به‌عنوان بهترین توابع معرفی کردند.

با این همه، هنوز مشخص نیست که از کاربرد رویکردهای کرنل نسبت به روش‌هـای شبیه‌سازی تاریخی سنتی چه‌مقدار بهبود را می‌توان انتظار داشت. هرچند روش‌های کرنـل به‌لحاظ نظری برترند، کاربرد آن‌ها نیز مشکل‌تر است و نتایج آن‌ها نیـز از وضـوح کمتـری برخوردار است. با این حال، ترکیب کرنل با دیگر رویکردها بهبود قابل‌ملاحظه‌ای در نتـایج ایجاد می‌کند.

شبکهٔ عصبی[3]

شبکهٔ عصـبی یـا شـبکهٔ یادگیرنـده[4] رویکـرد کـاملاً متفـاوتی بـرای تخمـین ارزش درمعرض‌ریسک و ریزش موردانتظار اسـت. شـبکه‌های عصـبی، مـدل‌های پردازش‌کننـدهٔ انطباق‌پذیر آماری است که ساختار آن مشابه مغز است. واحـدهای پردازش‌کننـده بـه‌عنوان نرون شناخته می‌شود که با روابط موزونی به یکدیگر متصل می‌شوند. ابتـدا اوزان ارتبـاطی

---

1. Butler and Schachter (1998).
2. adaptive Epanechnikov function
3. neural network
4. learning network

اختیاری به سیستم داده می‌شود و پس از واردکردن درون‌دادها، شبکهٔ عصبی برون‌دادهای اولیه را تعیین می‌کند. سپس این خروجی‌ها با خروجی‌های هدف مقایسه می‌شود و اگر به اندازهٔ کافی به آن نزدیک نباشد، در اوزان تجدیدنظر می‌شود تا اختلاف کاهش یابد. در ادامه، خروجی‌های جدید بر اساس اوزان جدید محاسبه می‌شود و با خروجی‌های هدف مقایسه می‌شود و اگر این خروجی‌ها نیز از هدف دور باشد، وزن‌ها دوباره مورد تجدیدنظر قرار می‌گیرند. این فرآیند بارها و بارها تکرار می‌شود تا زمانی‌که خروجی‌ها در حد قابل‌قبولی به خروجی‌های هدف نزدیک باشد. شبکه در این نقطه به اصطلاح پرورده شده است و می‌توان از آن جهت تخمین یا پیش‌بینی احتمالات یا صدک‌های جریانی از داده‌ها استفاده کرد. رویکردهای شبکهٔ عصبی بر مفروضات دست و پا گیر پارامتریک متکی نیست؛ بسیار منعطف و کاملاً انطباق‌پذیر است و به‌خوبی نسبت به تغییرات مجموعهٔ داده‌ها واکنش نشان می‌دهد.

شبکهٔ عصبی رویکردهای بسیار متنوعی دارد و روش‌های متعددی هم برای به‌کارگیری آن‌ها در پیش‌بینی ریسک‌های مالی وجود دارد. یکی از آن‌ها، رویکرد تابع شعاعی[1] است که خصوصاً برای تخمین احتمالات مناسب است. از این روش می‌توان برای برآورد احتمالات بازدهٔ سبد دارایی استفاده کرد. با داشتن این احتمالات، به‌سادگی می‌توان VaR یا ES را بر اساس روش‌های استاندارد ناپارامتریک برآورد نمود. دیگر روش‌های مناسب برای تخمین VaR یا ES، رویکرد انتگرال‌گیری بسته[2]، رویکرد نرمال مرکب[3] و رویکرد صدک–رگرسیون[4] است. شبکهٔ عصبی روشی جدید برای اندازه‌گیری ریسک است و هنوز برای تکامل رویکردهای آن راه درازی در پیش است.

نتیجه‌گیری

رویکردهای نیمه‌پارامتریک به‌طور همزمان از برخی ویژگی‌های رویکردهای پارامتریک و ناپارامتریک برخوردارند. این رویکردها به‌سادگی برای مسائلی با ابعاد بزرگ

1. radial basis function
2. closed-form integration approach
3. normal mixture approach
4. quantile-regression approach

قابل‌اجراست و از این جهت به رویکردهای ناپارامتریک شباهت دارند. این رویکردها با به‌کارگیری توزیع‌های پارامتریک، به ارایهٔ تصویر دقیق‌تری از توزیع احتمال متغیر مورد بررسی کمک می‌کنند. شواهدِ حاصل از کاربرد رویکردهای نیمه‌پارامتریک گویای بهبود قابل‌ملاحظهٔ تخمین‌ها نسبت به رویکردهای ناپارامتریک است.

منابع

1. Barone-Adesi, G. and Gannopoulos, k. (2000), *Non-Parametric VaR Techniques. Myths And Realities*. Universita della svizzera Italiana and City University Business School; and Westminster Business School.
2. Bowman, A. W. and Azzalini, A. (1997) *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis*, Oxford University Press.
3. Butler, J. S. and Schachter, B. (1998), "Improving value at risk with a precision measure by combining kernel estimation with historical simulation," *Review of Derivatives Research*, Vol. 1, pp. 371-390.
4. Hazelton, M. (1996), "Bandwidth selection for local density estimation," *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 23, pp. 221-232.
5. Hull, J. and White, A. (1998), "Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk" *Journal of Risk*, pp. 5-19.
6. Powell, J. L. (2003), *Notes on Nonparametric Density Estimation*, Department of Economics, University of California, Berkeley.

7. Renault, O. and Scaillet, O. (2004), "On way to recovery: a nonparametric bias free estimation of recovery rate densities," *Journal of Banking and Finance*, Vol. 28, pp. 2915-2931.

8. Sain, S. R. and Scott, D. W. (2002), "zero-bias bandwidths for locally adaptive kernel density estimation," *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 29, pp. 441-460.

9. Scott, D. W. (2001), "Parametric statistical modeling by minimum integrated square error," *Technometrics*, Vol. 43, pp. 274-285.

10. Silverman, B. W. (1986), *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall.

11. Tarter, M. E. (2000), *Statistical Curves and Parameters*, AK Peters, Natick, MA.

12. Wand, M. P., Marron, J. S. and Ruppert, D. (1991), "Transformations in density estimation," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 86, pp. 343-353.

فصل نهم

شبیه‌سازی مونت کارلو

مقدمه

ما در عصری زندگی می‌کنیم که بازارها و ابـزار مـالی بـه‌طور پیوسـته بـه پیچیـدگی گرایش دارند. جهانی‌شدن، نوآوری‌های مالی، پیشرفت‌های تکنولوژیک، قوانین و مقررات و بسیاری عوامل دیگر به پیچیدگی بیشتر بازارها دامن می‌زند. در چنـین شـرایطی، ریسـک سرمایه‌گذاری در دارایی‌های مـالی بـه عوامـل متعـدد و حتـی ناشـناخته‌ای منـوط اسـت. اندازه‌گیری ریسک در چنین شرایطی مستلزم اسـتفاده از مـدل‌هایی اسـت کـه پیچیـدگی محیط بیرونی را منعکس می‌کنند. چنین مدل‌هایی شامل فرآیندهایی است که بـه سـادگی درک نمی‌شود و تجزیه و تحلیل آماری آن‌ها مشکل و مستلزم صـرف وقـت و هزینـه‌های زیاد است.

گاهی اوقات تحلیل مستقیم برخی از فرآیندهای آماری با ابزار موجود غیرممکن اسـت و همیشه این احتمال وجود دارد که مسیر یـک فرآینـد، به‌درسـتی طـی نشـود. در چنـین شرایطی شاید بهترین کار این باشد که شرایط را برای رخداد وقایع شبیه‌سازی کنیم و رفتار متغیرهـا را در محیط‌هـای شبیه‌سازی‌شـده بررسـی نمـاییم. در چنـین محیطـی می‌تـوان متغیرهای جدید را وارد فرآیند کرد؛ می‌توان متغیرهای موجود و همبسـتگی میـان آن‌هـا را دست‌کاری کرد و اثر آن‌ها را بـر متغیـر مـوردنظر بررسـی نمـود؛ هم‌چنـین می‌تـوان اثـر بحران‌های مالی و رخدادهای غیرعادی را با تغییر متغیرهای کلیدی، مورد بررسی قرار داد.

شبیه‌سازی مونت‌کارلو[1] چنین محیطی را در اختیار ما می‌گذارد. کاربرد این روش پیشرفته با افزایش پیچیدگی مدل‌های مالی در حال افزایش است. این تکنیک بسیار منعطف و قدرت‌مند است و جهت حل مسائل پیچیده بسیار کارآمد می‌باشد.

در این فصل قصد نداریم با تشریح نحوهٔ عملکرد مولدهای اعداد تصادفی به جزئیات شبیه‌سازی مونت‌کارلو و روش‌های آن بپردازیم، بلکه تنها می‌خواهیم با ارایهٔ چند مثال، موارد استفاده از این روش و هم‌چنین توانمندی آن در ادارهٔ فرآیندهای پیچیده را به‌تصویر بکشیم.

تاریخچهٔ شبیه‌سازی مونت‌کارلو

مونت‌کارلو نام شهری در ناحیهٔ موناکو[2] واقع در جنوب شرقی فرانسه است که به‌خاطر قمارخانه‌هایش بسیار معروف است. ظهور روش مونت‌کارلو اغلب به کار استنیسلو یولام[3] ریاضی‌دان لهستانی برمی‌گردد که در طی جنگ جهانی دوم برای شرکت نومن[4] در پروژه منهتن[5] کار می‌کرد. یولام در سال ۱۹۵۱ به همراه ادوارد تلر[6] بمب هیدروژنی را طراحی کرد. وی بیشتر شهرت خود را به همین دلیل کسب کرده است. یولام در سال ۱۹۴۶ به هنگامی که در مورد احتمال برد بازی ورق تعمق می‌کرد، فکر استفاده از روشی را که بعداً مونت‌کارلو نامیده شد، در ذهن پروراند. بعد از تلاش برای حل این مسأله از طریق محاسبات ترکیبی، به فکر افتاد که اگر چندین دست داشت می‌توانست بازی را به کرّات انجام دهد و فراوانی بردها را عیناً ملاحظه نماید. این اندیشه او را بر آن داشت تا مسائل مربوط به انتشار نوترون و دیگر سؤالات مربوط به ریاضیات فیزیک را به شکلی مورد ملاحظه قرار دهد که بر اساس توالی عملکردهای تصادفی قابل‌تعبیر باشد.

امروزه از مونت‌کارلو به‌عنوان روشی یاد می‌شود که دربرگیرندهٔ هر تکنیک نمونه‌برداری آماری جهت ارایهٔ تقریبی از پاسخ‌های مسائل کمّی است. یولام نمونه‌برداری

1. Monte Carlo Simulation (MCS)
2. Monaco
3. Stanislaw Ulam
4. Neumann
5. Manhatan project
6. Edward Teller

آماری را کشف نکرد. این کار قبلاً برای حل مسائل کمّی از طریق فرآیندهای فیزیکی مانند پرتاب تاس یا برداشت کارت مورد استفاده قرار می‌گرفت. در واقع کمک یولام به علم، تشخیص امکان استفاده از رایانه‌های الکترونیکی جدید برای خودکارسازی نمونه‌برداری بود. ادامهٔ همکاری‌های او با نومن و نیکلاس متروپلیس[1] به توسعهٔ الگوریتم‌های رایانه‌ای و نیز بسط ابزار تبدیل مسائل غیرتصادفی به شکلی تصادفی منجر گردید که باعث تسهیل حل آن‌ها از طریق نمونه‌برداری آماری می‌شد. این کار، نمونه‌برداری آماری را از یک امر مهجور در ریاضی به یک متدولوژی رسمی مبدل نمود که برای طیف وسیعی از مسائل قابل‌کاربرد است. شرکت متروپلیس این متدولوژی جدید را مونت‌کارلو نام نهاد. در سال ۱۹۴۹ یولام و متروپلیس اولین مقاله را در زمینهٔ روش مونت‌کارلو در مجلهٔ انجمن آماری آمریکا به انتشار رساندند.[2]

در زمینهٔ علم مالی، شبیه‌سازی مونت‌کارلو از سال ۱۹۷۰ برای قیمت‌گذاری اوراق مشتقه و برآورد نسبت‌های پوشش یونانی[3] مورد استفاده قرار گرفت. در حال حاضر استفاده از این روش‌ها در جهت تخمین VaR و دیگر سنجه‌های ریسک مالی توسعه یافته است.

فرآیند شبیه‌سازی مونت‌کارلو

ایدهٔ شبیه‌سازی مونت‌کارلو، شبیه‌سازی مکرر فرآیند تصادفی حاکم بر قیمت و یا بازدهٔ ابزار مالی موردنظر می‌باشد. مثلاً، اگر به‌دنبال تخمین VaR هستیم، هر شبیه‌سازی، ارزش احتمالی سبد دارایی را در پایان دورهٔ نگهداری در اختیارمان قرار می‌دهد. اگر تعداد کافی از این شبیه‌سازی‌ها در اختیار داشته باشیم، توزیع شبیه‌سازی‌شدهٔ ارزش‌های سبد دارایی به توزیع صحیح ولی ناشناخته سبد نزدیک خواهد شد و می‌توانیم از این توزیع برای استنباط VaR و یا سایر سنجه‌های ریسک استفاده کنیم.

فرآیند شبیه‌سازی شامل چندین مرحله است. اولین مرحله، تعیین فرآیندهای تصادفی است که بر اساس آن نحوهٔ شکل‌گیری متغیر موردنظر تشریح می‌شود. یعنی، مرحلهٔ اول

1. Nicholas Metropolis
2. Metroplis and Ulam (1949).
3. Greek hedge ratios

شامل انتخاب مدلی برای متغیر یا متغیرهای تصادفی موردنظر می‌باشد. این مدل، معادل تابع نگاشت سبد دارایی در فرآیند محاسبهٔ VaR است. (به فصل دوم مراجعه کنید.)

در مرحلهٔ دوم به هرکدام از عوامل کلیدی ریسک موجود در تابع نگاشت، یک توزیع آماری منتسب می‌شود و پارامترهای آن‌ها یعنی تلاطم‌ها، همبستگی‌ها و غیره بر اساس قضاوت‌هایمان یا داده‌های تاریخی و یا داده‌های جاری بازار برآورد می‌گردد. این مرحله متناظر با فرآیند استنباط است.

این دو مرحله ورودی‌های شبیه‌سازی مونت‌کارلو می‌باشد. بنابراین، شبیه‌سازی مونت‌کارلو در رابطه با تعیین فرآیندهای تصادفی و یا برآورد پارامترها، مستقیماً هیچ کمکی ارایه نمی‌دهد.

در مرحلهٔ سوم، مسیرهای شبیه‌سازی‌شده[1] برای متغیرهای تصادفی را ایجاد می‌نماییم. بدین ترتیب هر مجموعه از اعداد تصادفی، مجموعه‌ای از قیمت‌های پایانی فرضی را برای ابزار مالی موجود در سبد دارایی تولید می‌نماید.

سپس این شبیه‌سازی‌ها را به اندازهٔ کافی تکرار می‌کنیم تا مطمئن شویم که توزیع شبیه‌سازی‌شده به اندازهٔ کافی به توزیع صحیح و ناشناختهٔ ارزش‌های سبد دارایی نزدیک می‌باشد. سرانجام می‌توانیم VaR یا سایر سنجه‌های ریسک را از این توزیع نماینده استخراج کنیم.

روش‌های تحلیلی[2] درمقابل شبیه‌سازی مونت‌کارلو

روش مونت‌کارلو را تقریباً می‌توان برای حل مسائلی با هر درجه‌ای از پیچیدگی مورد استفاده قرار داد. هم‌چنین به‌راحتی می‌توان عواملی مانند وابستگی مسیر[3]، دنباله‌های ضخیم، غیرخطی‌بودن و غیره را که دیگر رویکردها در مواجهه با آن‌ها با مشکل مواجه می‌شوند، به‌راحتی اداره نمود. رویکردهای شبیه‌سازی در عمل برای حل مسائل چندبعدی مفید است. این مسائل شامل موقعیت‌هایی است که نتایج به بیش از یک عامل ریسک بستگی دارد. عموماً شبیه‌سازی مونت‌کارلو زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که یا

---

1. simulated paths
2. analytical methods
3. path dependency

روش‌های تحلیلی در دسترس نیست و یا به‌قدری پیچیده است که با استفاده از این روش می‌توان به راه‌حلی ساده‌تر دست یافت. به‌طور کلی می‌توان گفت که با افزایش پیچیدگی و یا ابعاد مسائل، جذابیت این رویکردها نیز افزایش می‌یابد.

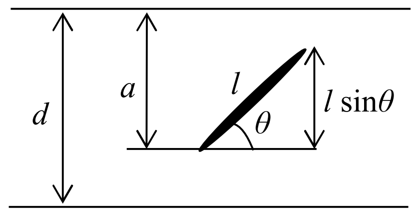
به هر حال زمانی که استفاده از رویکردهای ساده‌تر کفایت می‌کند، هیچ دلیلی برای استفاده از چنین روش قدرت‌مندی وجود ندارد. هیچ دلیلی وجود ندارد که برای شکستن گردو از پتک استفاده کنیم. بنابراین، اگر به‌دنبال قیمت‌گذاری یک اختیارخرید بلک- شولز هستیم، هیچ دلیلی برای استفاده از روش‌های شبیه‌سازی وجود ندارد، چراکه می‌توانیم این مسأله را به‌سادگی از طریق معادلهٔ قیمت‌گذاری بلک- شولز حل کنیم. به‌طور مشابه، برای تخمین ارزش درمعرض‌ریسک نرمال می‌توانیم از رابطهٔ آن استفاده کنیم و در این مورد نیز هیچ دلیلی برای استفاده از روش شبیه‌سازی وجود ندارد. بنابراین، تنها به‌هنگام مواجهه با موقعیت‌های پیچیده که چنین راه‌حل‌های ساده‌ای جوابگو نیست، از روش‌های شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده می‌کنیم.

در این‌جا برای کسب دیدگاهی راجع به روش مونت‌کارلو مثالی ارایه می‌کنیم.

مثال (۹-۱): تقریب عدد π

بیش از ۲۰۰ سال پیش از آنکه متروپلیس روش مونت‌کارلو را معرفی نماید، جرج- لوئیس لکلرس[1] مسائل متعددی را به دانشگاه علوم در پاریس عرضه کرد. یکی از این مسائل به این شرح می‌باشد: اگر سوزنی به طول l به‌طور تصادفی در وسط سطحی افقی بیافتد که دارای خطوطی موازی به فواصل l است، با توجه به شرط $d > l$، احتمال این‌که سوزن یکی از خطوط را قطع کند چقدر است؟ امروزه این مسأله با عنوان سوزن بوفن[2] معروف است. برای حل این مسأله به نمودار زیر توجه کنید.

1. George-Louis Leclerc
2. Buffon needle



نمودار (۹-۱): وضعیت سوزن نسبت به خطوط موازی

وضعیت سوزن نسبت به خط مجاور با یک بردار تصادفی با اعضای $a \in [0, d)$ و $\theta \in [0, \pi]$ تشریح می‌گردد. این بردار تصادفی (a, θ) در ناحیهٔ $[0, d) \times [0, \pi)$ دارای توزیع یکنواخت می‌باشد. بدین ترتیب تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\phi(a, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi d} & (a, \theta) \in [0, d) \times [0, \pi) \\ 0 & Otherwise \end{cases} \quad (۹\text{-}۱)$$

X را به‌عنوان متغیر تصادفی برای تعداد خطوط قطع‌شده در یک پرتاب سوزن در نظر می‌گیریم. اگر $d > l$، تنها و تنها زمانی یک خط قطع می‌شود که $a < l \sin \theta$ باشد. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Pr(X = 1) &= \int_0^{\pi} \int_0^{l \sin \theta} \phi(a, d) da\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{l \sin \theta} \frac{1}{\pi d} da\, d\theta \quad (۹\text{-}۲) \\ &= \frac{2l}{\pi d} \end{aligned}$$

پیر–سایمون لاپلاس[1] در این مسأله یک سرگرمی پیدا کرد. تصور کنید کـه آزمـایش بوفن با m پرتاب سوزن انجام شود. تعداد مـواردی را کـه یـک خـط توسـط سـوزن قطـع می‌شود، C در نظر بگیرید. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\Pr(X=1)=E\left(\frac{C}{m}\right) \quad (۳-۹)$$

بنابراین، نسبت C/m برآوردکنندهٔ بدون‌تورش $\Pr(X=1)$ است. جایگـذاری ایـن نسبت در رابطهٔ (۹-۲) برآوردکننده‌ای برای π در اختیارمان قرار می‌دهد:

$$\pi=\frac{m}{C}\left(\frac{2l}{d}\right) \qquad (۴-۹)$$

در سال ۱۹۶۴ کاپیتان او. سی. فکس[2] این آزمایش را در سه مرحله انجـام داد در هـر مرحله طول سوزن و فاصلهٔ خطوط را تغییر داد و حتی از سطوح گردان استفاده نمود. نتایج آزمایش او در جدول زیر نشان داده شده است:

تعداد پرتاب (m)	تعداد برخورد (C)	طول سوزن (l)	فاصلهٔ خطوط (d)	سطح	تقریب π
۵۰۰	۲۳۶	۳	۴	ثابت	۳/۱۷۸۰
۵۳۰	۲۵۳	۳	۴	گردان	۳/۱۴۲۳
۵۹۰	۹۳۹	۵	۲	گردان	۳/۱۴۱۶

جدول (۹-۱): نتایج آزمایش‌های فکس برای پرتاب سوزن

نتایج فکس نمایانگر دو مبحث مهم برای روش مونت‌کارلو می‌باشد:

۱. بعد از دستیابی به تقریبی ضعیف برای π در آزمایش اول، فکس آزمایش بعدی را با به‌کارگیری سطح گردان بهبود بخشید. وی این کار را انجام دارد تا تورش‌های ناشـی از موقعیت او در حین پرتاب سوزن را از بین ببرد. بـدین‌ترتیب تقریـب وی در ایـن آزمـایش

1. Pierre-Simon Laplace
2. Captain O. C. Fox

به‌نحو قابل‌ملاحظه‌ای بهبود یافت. برای شبیه‌سازی مونت‌کارلو در رایانه نیز تورش باید از میان برود. البته، با این تفاوت که در رایانه تورش بر اثر مولد اعداد تصادفی ایجاد می‌شود.

۲. فکس در آزمایش سوم از یک سوزن ۵ اینچی استفاده نمود و فاصلهٔ میان خطوط را تنها ۲ اینچ تعیین کرد. در این حالت ممکن است سوزن سه خط را در یک پرتاب قطع کند. در ۵۹۰ پرتاب فکس ۹۳۹ خط قطع‌شده را مشاهده کرد. این کار مستلزم اندکی تلاش بیشتر نسبت به دو آزمایش قبلی بود، اما تقریب بهتری را برای π به‌همراه داشت. این نوآوری فکس پیش‌درآمدی بر فنون کاهش واریانس[1] امروزی به‌حساب می‌آید.

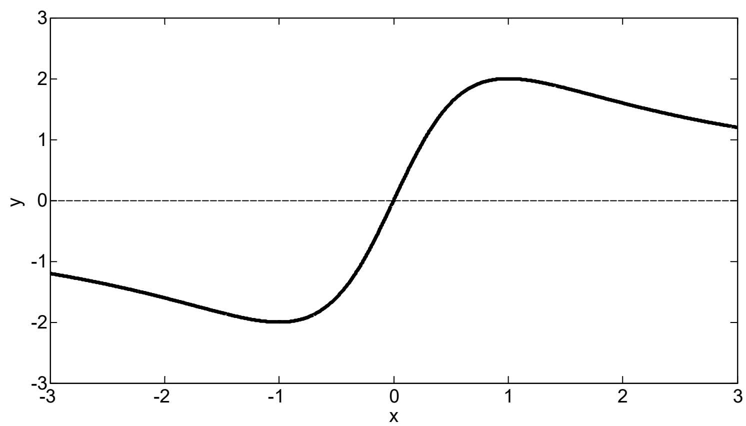
برای درک بیشتر روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو مثال دیگری ارایه می‌نماییم:

مثال (۹-۲): تخمین انحراف‌معیار

فرض کنید X متغیری تصادفی است که دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف‌معیار یک می‌باشد. حال تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\frac{4x}{x^2+1} \qquad (۹-۵)$$

نمودار این تابع به شکل زیر است.



نمودار (۹-۲): نمودار تابع f

1 variance reduction techniques

ما از این تابع برای تعریف یک متغیر تصادفی جدید استفاده می‌کنیم:

$$Y = f(X) \qquad (۹-۶)$$

با وجود این‌که X نامحدود است، بر اساس نمودار (۹-۵)، Y محدود است و بنـابراین میانگین آن موجود می‌باشد. هم‌چنین مشخص است که Y متقارن می‌باشد. بر این اساس و نیز با توجه به تقارن توزیع نرمال‌استاندارد نتیجه می‌گیریم که میانگین Y برابر صفر است.

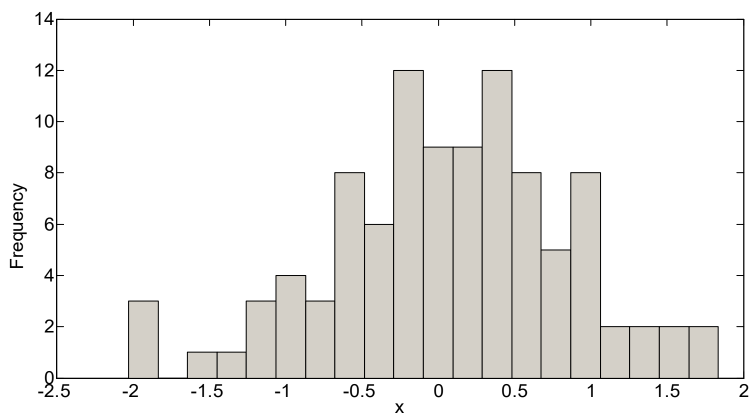
از آنجا که Y محدود است، واریانس آن نیـز بایـد موجـود باشـد. به‌دسـت‌آوردن ایـن واریانس از راه تحلیلی مشکل است، اما به‌راحتی می‌توانیم با روش مونت‌کارلو تقریبی از آن به‌دست آوریم. برای این کار نمونه‌ای را برای X تعریف می‌کنیم:

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_{100}\}$$

و به‌طور تصادفی اعدادی را برای این نمونه استخراج می‌کنیم:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{100}\}$$

هیستوگرام این اعداد را در نمودار زیر مشاهده می‌کنید.

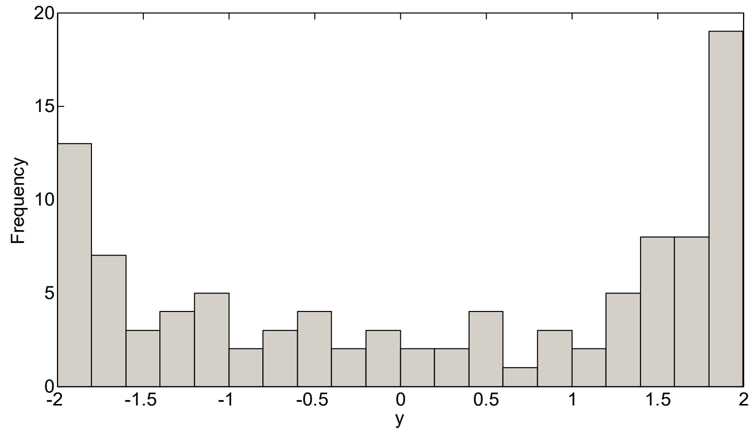


نمودار (۹-۳): هیستوگرام اعداد تصادفی تحقق‌یافته برای متغیر X

ارزش متناظر هر x_k را برای y محاسبه می‌کنیم:

$$y_k = f(x_k) \qquad (۹-۷)$$

نتایج شامل اعداد استخراج‌شـدهٔ $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ بـرای نمونـهٔ $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ می‌باشد. این اعداد در نمودار زیر ارایه شده است.



نمودار (۹-۴): هیستوگرام اعداد تحقق‌یافتهٔ متغیر Y بر اساس تابع f

حال از برآوردکنندهٔ واریانس نمونه برای تخمین واریانس Y استفاده می‌کنیم:

$$\hat{\sigma}^2(Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(y_k - \mu\right)^2 = \frac{1}{100-1}\sum_{k=1}^{100} y_k^2 = 2.47$$

کاربرد شبیه‌سازی مونت‌کارلو در مالی

در این‌جا با ارایهٔ دو کاربرد سادهٔ شبیه‌سازی مونت‌کارلو در قیمت‌گذاری اوراق بهادار و برآورد ریسک این فصل را به پایان می‌رسانیم.

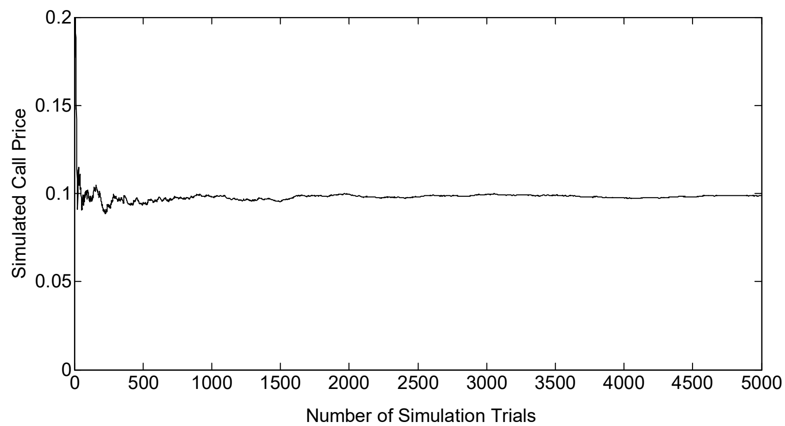
یکی از کاربردهای مالی شبیه‌سازی مونت‌کارلو، قیمت‌گذاری اوراق مشتقه است. برای انجام چنین کاری، مسیرهای نمونه[1] برای قیمت دارایی تعهدشده مثلاً قیمت سهام (S) در جهانی بی‌تفاوت نسبت به ریسک شبیه‌سازی می‌گردد. عموماً فرآیند حرکت برآونی هندسی برای تحرکات قیمت دارایی تعهدشده در نظر گرفته می‌شود و بازدهٔ موردانتظار (μ) برابر با نرخ بازدهٔ بدون ریسک (r_f) تعیین می‌شود. سپس پیامد نقـدی حاصـل از نگهـداری ورق

1. sample paths

مشتقه در انتهای هر مسیر محاسبه می‌شود. مثلاً، پیامد حاصل از اختیارخرید استاندارد بلک–شولز با قیمت توافقی X برابر با $\max[(S_T - X),0]$ می‌باشد که S_T قیمت پایانی سهم می‌باشد. این کار را به تعداد زیادی (M بار) تکرار می‌کنیم و میانگین نمونهٔ پیامدهای حاصل از قیمت ورق مشتقه را محاسبه کرده و آن را جهت دستیابی به قیمت مشتقه براساس نرخ بازدهٔ بدون ریسک تنزیل می‌کنیم.

مثال (۹–۳): قیمت‌گذاری اختیارخرید استاندارد

می‌خواهیم از روشی که تشریح‌شد برای قیمت‌گذاری یک اختیارخرید استاندارد بلک–شولز با $S_0 = X = 1$، $\mu = r_f = 0$ ، $\sigma = 0.25$ و سررسید ۱ سال استفاده کنیم. در این مثال برای M، اعدادی از ۱ تا ۵۰۰۰ در نظر می‌گیریم. نتایج در نمودار (۹–۵) ارایه شده است.



نمودار (۹–۵): شبیه‌سازی قیمت اختیارخرید استاندارد

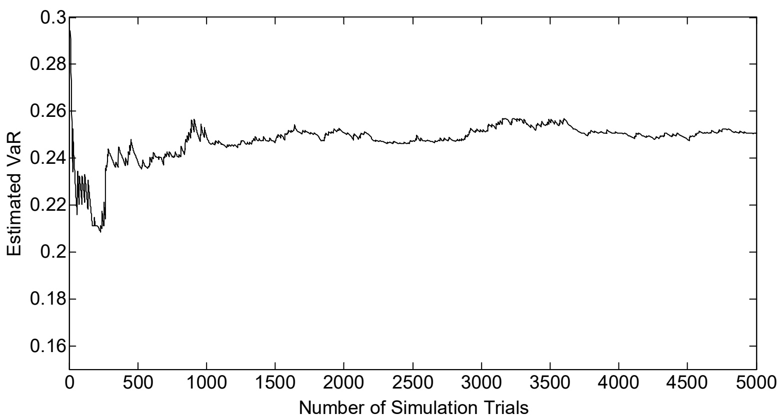
این نمودار نشان می‌دهد که قیمت شبیه‌سازی‌شدهٔ اختیارخرید در ابتدا بی‌ثبات است، اما به آرامی به سمت قیمت درست اختیارخرید بر اساس رابطهٔ بلک– شولز نزدیک می‌شود. قیمت درست این اختیارخرید ۰/۰۹۹۵ است. این نمودار همچنین نشان می‌دهد که برای دست‌یابی به نتایج دقیق به تعداد نسبتاً زیادی تکرار نیازمندیم.

دیگر کاربرد متداول شبیه‌سازی مونت‌کارلو، برآورد سنجه‌های ریسک است. این روش تصویری از توزیع احتمال بازدهٔ سبد دارایی فراهم می‌آورد. با در اختیارداشتن این توزیع

محاسبه سنجه‌های ریسک کار ساده‌ای است. برای درک بیشتر این موضوع مثالی ارایه می‌کنیم.

مثال (۹-۴): ارزش درمعرض‌ریسک اختیارخرید

فرض کنید یک دلار در اختیارخرید استاندارد بلک- شولز با مشخصات $X = 0.5$ $S_0 = 1$، $\mu = r_f = 0$، $\sigma = 0.25$ سرمایه‌گذاری کرده‌اید. می‌خواهیم در سطح اطمینان ۹۵٪ و دورهٔ نگهداری ۵ روزه، ارزش درمعرض‌ریسک این موقعیت را به تعداد ۱ تا ۵۰۰۰ بار شبیه‌سازی کنیم. نتایج این شبیه‌سازی در نمودار (۹-۶) ارایه شده است. این نمودار نشان می‌دهد که ارزش درمعرض‌ریسک شبیه‌سازی‌شده در ابتدا بی‌ثبات می‌باشد، اما به آرامی به سمت مقدار صحیح آن یعنی ۰/۲۴۵ هم‌گرا می‌شود.



نمودار (۹-۶): شبیه‌سازی ارزش درمعرض‌ریسک اختیارخرید

این نمودار هم‌چنین متذکر می‌شود که جهت دستیابی به نتایجی دقیق نسبت به مثال قبل به تعداد تکرارهای بیشتری نیازمندیم. در واقع در تخمین سنجه‌های ریسک نسبت به قیمت‌گذاری اختیارمعامله، برای دستیابی به هر سطح معینی از دقت، به تعداد تکرار بیشتری نیاز است. این مسأله بدیهی به‌نظر می‌رسد، چراکه در قیمت‌گذاری اختیارمعامله، برآورد میانگین پیامدها (میانگین توزیع) مدنظر است، در حالی‌که سنجه‌های ریسک درگیر برآورد دنبالهٔ توزیع سود/ زیان می‌باشد و می‌دانیم که تخمین‌های میانگین نسبت به تخمین‌های مربوط به صدک‌های دنباله برای هر نمونه‌ای با اندازهٔ معین از دقت بیشتری برخوردارند.

این رویکرد را می‌توان برای تخمین دیگر سنجه‌های ریسک مالی توسعه داد. بدین‌ترتیب که ابتدا یک توزیع سود/زیان شبیه‌سازی‌شده تولید می‌نماییم و سپس ریسک را بر اساس سنجهٔ موردنظر تشریح می‌کنیم.

مزایا و معایب شبیه‌سازی مونت‌کارلو

شبیه‌سازی مونت‌کارلو دارای مزایایی به شرح زیر است:

- کاربرد آن پس از توسعهٔ برنامهٔ رایانه‌ای آسان است و نرم‌افزارهای زیادی در این زمینه موجود است.
- برخلاف رویکردهای تحلیلی یا رویکردهایی که راه‌حل‌های بسته ارایه می‌دهند، می‌توان فرآیندهای تصادفی پیشرفته‌تر از حرکت هندسی براونی را در آن جای داد.
- هیچ مسأله‌ای برای ادارهٔ عوامل ریسک چندگانه[1]، همبستگی‌ها و دنباله‌های ضخیم وجود ندارد.
- تعدیل و بهبود روش‌های شبیه‌سازی مونت‌کارلو آسان است.
- برخلاف بسیاری از رویکردهای تحلیلی، هیچ مسأله‌ای در رابطه با پیچیدگی‌های وابستگی مسیر وجود ندارد.
- می‌توان از آن برای سبدهایی با ابزار ناهمگن و یا پیچیده مانند مشتقه‌های اعتباری[2]، اوراق بهادار با پشتوانهٔ وام‌های رهنی[3] و غیره استفاده کرد.
- روش‌های شبیه‌سازی مونت‌کارلو را می‌توان به‌طرز قابل‌ملاحظه‌ای برای افزایش دقت یا کاهش زمان محاسبه، پالایش کرد.
- این روش‌ها شاخص‌هایی از دقت نتایج در اختیار می‌گذارد. هم‌چنین برآورد فواصل اطمینان بر اساس آن‌ها بسیار ساده است.
- به‌راحتی می‌توان دقت نتایج را با افزایش تعداد تکرارها (شبیه‌سازی‌ها) افزایش داد.

---

1. multiple risk factors
2. credit derivatives
3. mortgage-backed securities (MBS)

برخی از معایب رویکرد شبیه‌سازی مونت‌کارلو عبارت است از:

- به‌خاطر تعداد محاسبات زیاد ممکن است بسیار کند باشد. خصوصاً زمانی که با تعداد زیادی عامل ریسک سروکار داریم.
- در برخورد با مسائلی که ابعاد کمی دارند، نسبت به روش‌های تحلیلی از کارایی کمتری برخوردار است.
- گاهی اوقات درک آن‌ها مشکل است و اغلب برای کاربرد به مهارت‌های برنامه‌نویسی نیاز است.

نتیجه‌گیری

شبیه‌سازی مونت‌کارلو رویکردی قدرت‌مند و کارآمد جهت حل مسائلی با درجهٔ پیچیدگی بالاست. با وجود برخی معایب شبیه‌سازی مونت‌کارلو، دلایلی خوبی برای فراگیرشدن استفاده از این روش در آینده وجود دارد. روش‌های شبیه‌سازی مونت‌کارلو متکی به قدرت محاسباتی بالاست و هزینه‌های فن‌آوری اطلاعات نیز سالانه با نرخ ۲۵ تا ۳۰ درصد در حال کاهش است و در عین حال، روش‌های محاسباتی حتی با سرعت بیشتری در حال بهبود است. می‌توان انتظار داشت که این روند در آینده نیز ادامه داشته باشد و در نتیجه روش‌های شبیه‌سازی مونت‌کارلو در نرم‌افزارهایی قابل‌فهم‌تر و از طریق رایانه‌هایی با سرعت بالاتر، قابل‌اجرا خواهد شد.

منابع

۱. مریم کریمی (۱۳۸۶)، پایان‌نامه: *بهینه‌سازی پرتفوی با استفاده از مدل ارزش در معرض خطر در بورس اوراق بهادار تهران*، دانشکدهٔ علوم اجتماعی و اقتصادی دانشگاه الزهرا، استاد راهنما: دکتر شاپور محمدی.

۲. مهراب یوسفیان (۱۳۷۷)، پایان‌نامه: *بررسی امکان استفاده از فنون جدید بودجه‌بندی سرمایه‌ای*، دانشکدهٔ معارف اسلامی و مدیریت دانشگاه امام صادق، استاد راهنما: دکتر حسین عبده تبریزی.

3. Cvitanic, J and Zapatero, F. (2004), *Economics and Mathematics of Financial Markets*, MIT press, Cambridge, MA, USA.
4. Dowd, K. *Measuring Market Risk* (2005), John Wiley & Sons Ltd. Second Edition.
5. Holton G. A. (2004), *Value-at-Risk: Theory and Practice*, Academic Press.
6. Metroplis, N. and Ulam, S. (1949), "The Monte Carlo method" *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 44, No. 247, pp. 335-341.

فصل دهم

تجزیهٔ ریسک

مقدمه

پس از اندازه‌گیری ریسک سبد دارایی با پرسش مهمی مواجه می‌شویم و آن این‌که چگونه سبد دارایی را در طول زمان و جهت دستیابی به سطح ریسک موردنظر اداره کنیم. پاسخ به این پرسش مستلزم شناسایی نقش اجزای سبد در ریسک کل آن است. یعنی باید بدانیم که تغییر موجودی هرکدام از دارایی‌ها به چه میزان ریسک کل سبد دارایی را تغییر می‌دهد و نیز در حال حاضر هرکدام از اجزای سبد چه سهمی در ریسک کل آن دارد. پاسخ به این سؤالات مستلزم تجزیهٔ ریسک[1] است. در این فصل به تجزیهٔ ریسک می‌پردازیم.

ریسک‌های افزایشی[2] و اجزاء[3]

ریسک افزایشی شامل تغییرات در ریسک به ازای تغییر برخی از موقعیت‌های سبد دارایی است. مثلاً، ممکن است در جستجوی این باشیم که ارزش درمعرض‌ریسک به ازای

1. risk decomposition
2. incremental risks
3. component risks

افزایش یک سهم جدید به سبد چه تغییری می‌کند. بنابراین، ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی[1] همان تغییر در VaR به ازای اضافه‌شدن یک موقعیت جدید به سبد است.

ریسک‌های اجزاء شامل ریسک هرکدام از اجزای سبد دارایی است که در مجموع ریسک کل را می‌سازد. به‌عنوان مثال، ارزش درمعرض‌ریسک یک سبد سهام قابل‌تجزیه به ارزش درمعرض‌ریسک دارایی‌های موجود در آن است که به آن ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء[2] می‌گویند.

ریسک‌های افزایشی و اجزاء، ابزارهایی بسیار مفید در مدیریت ریسک محسوب می‌شوند. گزارش‌های مربوط به تجزیهٔ ریسک، در جهت ایجاد بینشی نسبت به ریسک سبد دارایی‌ها کمک می‌کند و نیز در جهت شناسایی منابع افزایش ریسک، منابع کاهش ریسک و کشف پوشش‌های طبیعی[3] بسیار مفید است. این ابزارها اطلاعاتی را فراهم می‌آورد که می‌توان در جهت انتخاب نوع و نحوهٔ پوشش ریسک، اخذ تصمیمات سرمایه‌گذاری، اطلاع‌رسانی و افشای ریسک و دیگر اهداف مدیریت ریسک استفاده نمود.

ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی

اگر ارزش درمعرض‌ریسک نشانگر ریسک یک سبد دارایی باشد، ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی گویای چگونگی تغییر ریسک این سبد به ازای تغییر سبد دارایی است. به‌طور دقیق‌تر ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی، تغییر ارزش درمعرض‌ریسک سبد دارایی به هنگام افزایش یک موقعیت جدید به آن است. سه حالت مهم برای این‌گونه تغییرات وجود دارد:

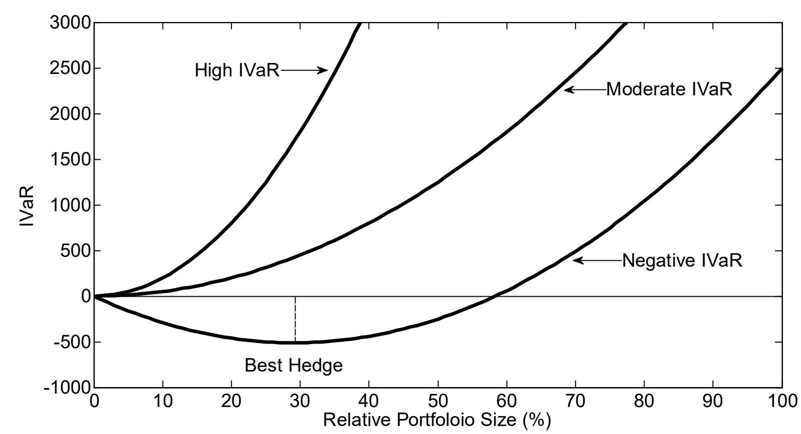
۱. ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی بزرگ: ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی بزرگ و مثبت بدین معنی است که موقعیت‌های جدید، مقادیر قابل‌ملاحظه‌ای را به ریسک سبد دارایی‌ها می‌افزایند. عموماً در این حالت نه‌تنها مقدار ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی با افزایش اندازهٔ موقعیت رشد می‌کند بلکه این رشد همراه با یک نرخ افزایشی است. با اندکی تأمل، دلیل

1. incremental VaR (IVaR)
2. component VaR (CVaR)
3. natural hedges

این نرخ افزایشی آشکار می‌شود. همگام با افزایش نسبی اندازهٔ موقعیت جدید، علاوه بر این‌که ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی سبد به‌خاطر اثر اندازه افزایش می‌یابد، بلکه این موقعیت جدید به خودی خود بر افزایش ارزش درمعرض‌ریسک سبد جدید نیز مؤثر است، چراکه اثرات تنوع‌بخشی را از میان می‌برد و در نتیجه ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی باز هم افزایش می‌یابد.

۲. ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی متوسط: ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی متوسط و مثبت بدین معنی است که موقعیت‌های جدید به اندازهٔ متوسطی به ریسک سبد دارایی‌ها می‌افزایند. در این حالت نیز عموماً ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی به ازای اندازهٔ نسبی موقعیت با یک نرخ افزایشی رشد می‌کند.

۳. ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی منفی: ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی منفی بدین معنی است که موقعیت‌های جدید، ارزش درمعرض‌ریسک کل سبد دارایی را می‌کاهند. یعنی موقعیت‌های جدید یک پوشش طبیعی در سبد موجود فراهم می‌آورند. با این‌حال با افزایش اندازهٔ نسبی موقعیت جدید، در نهایت ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی شروع به افزایش می‌کند. در این حالت ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی شکلی مشابه پایین‌ترین منحنی نمودار (۱۰-۱) به خود می‌گیرد؛ یعنی ابتدا کاهش می‌یابد، سپس به یک نقطهٔ حداقل می‌رسد و سرانجام افزایش می‌یابد.



نمودار (۱۰-۱): تغییرات ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی با توجه به افزایش اندازهٔ موقعیت‌ها

بنابراین، در حالت اخیر هر موقعیت تنها در یک محدودهٔ خاص از اندازه‌های نسبی، باعث پوشش ریسک سبد می‌گردد و با افزایش اندازهٔ موقعیت، پوشش حاصله از بین می‌رود. نقطه‌ای که در آن اثر پوشش بیشینه می‌شود، به‌عنوان بهترین پوشش[1] نامیده می‌شود و جهت مدیریت ریسک سبد دارایی یک نقطهٔ مرجع محسوب می‌گردد.

برآورد ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی

دو روش مهم جهت برآورد ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی وجود دارد. رویکرد قبل و بعد و رویکرد تحلیلی. در ادامه به تشریح هرکدام از این رویکردها می‌پردازیم.

رویکرد قبل و بعد[2]

ساده‌ترین و دقیق‌ترین راه برای تخمین ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی، رویکرد قبل و بعد است. برای برآورد $IVaR$ کار را با سبد دارایی فعلی شروع می‌کنیم. ابتدا موجودی دارایی‌های سبد فعلی یعنی p را تعیین و سپس ارزش درمعرض‌ریسک این سبد یعنی $VaR(p)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس معاملهٔ موردنظر یعنی a را انتخاب می‌کنیم و یک سبد فرضی بر اساس انجام این معامله می‌سازیم. موجودی دارایی‌های سبد فرضی یعنی $p+a$ را نیز تعیین و ارزش درمعرض‌ریسک آن یعنی $VaR(p+a)$ را محاسبه می‌کنیم. بدین ترتیب ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی مربوط به معاملهٔ a یعنی $IVaR(a)$ را از طریق اختلاف بین این دو ارزش درمعرض‌ریسک برآورد می‌نماییم:

$$IVaR(a) = VaR(p+a) - VaR(p) \quad (۱-۱۰)$$

متأسفانه رویکرد قبل و بعد ایراد مشخصی دارد. اگر موقعیت‌های سبد دارایی متنوع و مختلف باشد، خصوصاً اگر گزینه‌های زیادی روبروی ما باشد و یا ارزش درمعرض‌ریسک سبد دارایی غیرخطی باشد، محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک سبد فعلی و فرضی وقت زیادی می‌طلبد. بسیاری از مؤسسات مالی هزاران موقعیت مختلف در سبد دارایی خود دارند و

1. best hedge
2. before and after approach

ارزیابی مجدد ارزش درمعرض‌ریسک می‌تواند فرآیندی وقت‌گیر باشد. به همین دلیل برآورد $IVaR$ با استفاده از رویکرد قبل و بعد، استفادهٔ محدودی دارد.

رویکرد تحلیلی[1]

برای کاهش بار محاسباتی، روشی توسط گارمن پیشنهاد شد.[2] او پیشنهاد کرد که $IVaR$ با استفاده از تقریب سری تیلور[3] و بر اساس ارزش‌های درمعرض‌ریسک نهایی[4] برآورد شود. دوباره فرض می‌کنیم که یک سبد دارایی با عنوان p داریم و می‌خواهیم ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی مربوط به اضافه‌شدن موقعیت جدید a را تخمین بزنیم. کار را با شناسایی موقعیت‌های سبد فعلی برای n ابزار مالی موجود در آن آغاز می‌کنیم. بدین ترتیب سبد p دارای برداری از اندازهٔ نسبی موقعیت‌های موجود در آن است:

$$\begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix} \quad (۲-۱۰)$$

که w_1 اندازهٔ نسبی موقعیت ۱ است. بر این اساس، سبد جدید دارای بردار متناظری به ترتیب زیر است:

$$\begin{bmatrix} w_1 + \Delta w_1 & \dots & w_n + \Delta w_n \end{bmatrix} (۳-۱۰)$$

اگر a نسبت به p کوچک باشد، می‌توان ارزش درمعرض‌ریسک سبد جدید یعنی $VaR(p+a)$ را با استفاده از تقریب مرتبهٔ اول سری تیلور در حواشی $VaR(p)$ تقریب زد:

$$VaR(p+a) \approx VaR(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial VaR}{\partial w_i} dw_i \ (۴-۱۰)$$

$$dw_i \approx \Delta w_i$$

1. analytical approach
2. Garman (1996a,b,c,d)
3. Taylor series approximation
4. marginal VaRs

اگر تغییرات به اندازهٔ کافی کوچک باشد، هرکدام از مشتقات جزئی سمت راست رابطهٔ فوق به‌عنوان ارزش درمعرض‌ریسک نهایی شناخته می‌شود. بنابراین، ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی مربوط به موقعیت a برابر است با مجموع ارزش‌های درمعرض‌ریسک نهایی:

$$IVaR(a) = VaR(p+a) - VaR(a) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial VaR}{\partial w_i} dw_i \quad (۵-۱۰)$$

می‌توان رابطهٔ فوق را به‌صورت زیر نمایش داد:

$$IVaR(a) = \nabla \mathbf{VaR(p)dw} \quad (۶-۱۰)$$

که $\mathbf{dw}$ ترانهادهٔ بردار تغییرات در اندازهٔ موقعیت‌هاست و $\nabla\mathbf{VaR(p)}$ بردار $1\times n$ مشتقات جزئی $VaR(p)$ نسبت به w_i است. این رابطه، تقریبی از ارزش درمعرض ریسک افزایشی مرتبط با موقعیت a را با توجه به اطلاعات موجود در $\nabla\mathbf{VaR(p)}$ و بردار $\mathbf{dw}$ به‌دست می‌دهد. $\mathbf{dw}$ را به‌راحتی می‌توان از اندازهٔ نسبی موقعیت‌ها و $\nabla\mathbf{VaR(p)}$ را می‌توان هم‌زمان با برآورد $VaR(p)$ به‌دست آورد. یعنی می‌توانیم $IVaR$ را تنها با استفاده از پارامترهای اولیهٔ مربوط به سبد اصلی برآورد نمود و فقط داده‌های مربوط به $\mathbf{dw}$ مورد نیاز است. این روش بسیار مفید است، چراکه به ما امکان محاسبهٔ تعداد بی‌شماری $IVaR(a)$ را می‌دهد.

فرآیند تخمین $IVaR$ با استفاده از روش گارمن آسان است. کار با شناسایی موقعیت‌های سبد آغاز می‌شود و از داده‌های بازار برای برآورد ارزش درمعرض‌ریسک سبد و $\nabla\mathbf{VaR(p)}$ استفاده می‌شود. توجه کنید که $\nabla\mathbf{VaR(p)}$ تنها وابسته به سبد فعلی است و به گزینه‌های معامله بستگی ندارد. با داشتن ارزش درمعرض‌ریسک سبد و بردار مشتقات جزئی، می‌توان هر معامله‌ای را انتخاب کرده و بردار تغییرات در موقعیت‌های نسبی را تعیین نمود. سرانجام ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی مربوط به آن معامله با استفاده از بردار تغییرات نسبی و بردار مشتقات جزئی برآورد می‌شود.

تنها سؤالی که باقی می‌ماند این است که چگونه $\nabla\mathbf{VaR(p)}$ را برآورد کنیم. می‌توانیم جملات این بردار را با تقریب مناسبی تخمین بزنیم. برای انجام این کار ارزش

درمعرض‌ریسک را برای موجودی‌های w_i و $w_i + \Delta w_i$ محاسبه می‌کنیم. سپس از رابطهٔ زیر استفاده می‌نماییم:

$$\frac{\partial VaR}{\partial w_i} \approx \frac{\left(VaR(p|w_i + \Delta w_i) - VaR(p|w_i)\right)}{w_i} \quad (۱۰-۷)$$

که $VaR(p|w_i)$ ارزش درمعرض‌ریسک سبد p با توجه به موجودی موقعیت i یعنی w_i است. $VaR(p|w_i + \Delta w_i)$ نیز ارزش درمعرض‌ریسک سبد p و با توجه به موجودی جدید موقعیت i یعنی $w_i + \Delta w_i$ است.

برخی مواقع می‌توان $\nabla \mathbf{VaR(p)}$ را به‌صورت جبری محاسبه نمود. مثلاً، اگر بازده دارای توزیع نرمال با میانگین μ و ماتریس واریانس-کوواریانس Σ باشد، خواهیم داشت:

$$\nabla \mathbf{VaR(p)} = -\mathbf{p}\left[\boldsymbol{\mu}\mathbf{dw} - \frac{\sum \mathbf{w}\, z_\alpha}{\left(\mathbf{w}^{\mathbf{T}} \sum \mathbf{w}\right)^{1/2}}\right] \quad (۱۰-۸)$$

رابطهٔ فوق اجازه می‌دهد که $\nabla \mathbf{VaR(p)}$ را با استفاده از اطلاعات مربوط به بردار موجودی‌های سبد فعلی $(\mathbf{w})$ و سبد جدید $(\mathbf{dw})$، بردار قیمت دارایی $(\mathbf{p})$، بردار میانگین بازده دارایی $(\boldsymbol{\mu})$ و ماتریس واریانس-کوواریانس (Σ) محاسبه نمود. همه این‌ها موجود بوده و برای محاسبهٔ VaR استخراج شده‌اند.

روش گارمن را می‌توان با تناوب روزانه مورد استفاده قرار داد. بدین ترتیب که در آغاز هر روز معاملاتی هم VaR و هم $\nabla \mathbf{VaR(p)}$ را برای سبد موجود محاسبه می‌کنیم. سپس می‌توان بر اساس این تخمین‌های اولیه از VaR و $\nabla \mathbf{VaR(p)}$ به برآوردهایی از $IVaR$ دست یافت. به یاد داریم که در روش قبل و بعد، هر تخمین از $IVaR$ نیاز به برآورد مجدد ارزش درمعرض‌ریسک دارد. اما، در این‌جا با عدم‌برآورد مجدد ارزش درمعرض‌ریسک در طی روز که کار پرزحمتی است، $IVaR$ با سرعت بسیار زیادی صورت برآورد می‌شود. تجربه نشان می‌دهد که این رویکرد اغلب اوقات برای بیشتر مؤسسات به‌خوبی کار می‌کند.

مثال (۱۰-۱): روش گارمن برای برآورد $IVaR$

فرض کنید ارزش بازار سبد دارایی مورد بررسی ۱۰۰،۰۰۰ تومان و شامل دو سهم ۱ و ۲ است. ارزش این دو سهم نسبت به ارزش کل سبد دارایی به‌ترتیب ۰/۷ و ۰/۳ است. بازدهٔ این دو دارایی دارای توزیع نرمال‌استاندارد چندمتغیره با ضریب همبستگی ρ است. می‌خواهیم ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی مربوط به یک خرید ۱،۰۰۰ تومانی از سهم ۱ را برآورد کنیم.

برای پاسخ به این سؤال، ابتدا باید مشتق جزئی ارزش درمعرض‌ریسک را نسبت به هر دارایی محاسبه نماییم و برای انجام این کار باید پارامترهای $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ را در معادلهٔ ارزش درمعرض‌ریسک چندمتغیرهٔ نرمال قرار دهیم:

$$\%VaR = (-\mathbf{w\mu} + \sqrt{\mathbf{w}\sum \mathbf{w}^{\mathrm{T}}}\ z_\alpha)$$
$$\%VaR = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} z_\alpha \quad (۹-۱۰)$$
$$= (w_1^2 + 2\rho\, w_1 w_2 + w_2^2) z_\alpha$$

که w_1 و w_2 سهم نسبی دو دارایی از ارزش سبد است. حال مشتقات جزئی VaR نسبت به وزن هر سهم را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial VaR}{\partial w_1} = 2(w_1 + \rho w_2) z_\alpha = 2(0.7 + 0.3\rho) z_\alpha = (1.4 + 0.6\rho) z_\alpha$$
$$\frac{\partial VaR}{\partial w_2} = 2(w_2 + \rho w_1) z_\alpha = 2(0.3 + 0.7\rho) z_\alpha = (0.6 + 1.4\rho) z_\alpha$$

خرید مقدار اضافی از سهم ۱، اوزان دو دارایی را به‌ترتیب زیر تغییر می‌دهد:

$$dw_1 = \frac{71000}{101000} - 0.7 \approx 0.003$$
$$dw_2 = \frac{30000}{101000} - 0.3 \approx -0.003$$

با جایگذاری مشتقات نسبی و تغییرات وزن‌ها خواهیم داشت:

$$\%IVaR \approx \frac{\partial VaR}{\partial w_1} dw_1 + \frac{\partial VaR}{\partial w_2} dw_2 = 0.8(1-\rho)0.003 z_\alpha$$

توجه داشته باشید که چون محاسبات بر اساس بازدهٔ دارایی‌هاست، حاصل رابطهٔ فـوق $\%IVaR$ است. اگر ضریب همبستگی بازده‌های این دو دارایی برابر ۰/۴− باشد، در سطح اطمینان ۹۵ درصد، $\%IVaR$ تقریباً برابر است با:

$$\%IVaR \approx 0.8(1+0.4)\times 0.003\times 1.645 = 0.0055$$

و حاصل‌ضرب $\%IVaR$ در ارزش اولیـهٔ سـبد دارایـی، تقریبـی از $IVaR$ به‌دسـت می‌دهد:

$$IVaR = 0.005\times 100000 = 550$$

و این در حالی است که ارزش درمعرض‌ریسک اولیهٔ سبد دارایـی در سـطح اطمینـان ٪۹۵ برابر است با:

$$\%VaR = (0.7^2 + 2\times -0.4\times 0.7\times 0.3 + 0.3^2)\times 1.645 = 0.68$$
$$VaR = 0.68\times 100000 = 68000$$

و این بدان معنی است که $IVaR$، تقریبـاً ۰/۸ درصـد ارزش درمعرض‌ریسـک اولیـه است.

حال سبد دیگری را در نظر بگیرید که در آن وزن سهم ۱ برابر صـفر و وزن سـهم ۲، برابر یک است. اگر بقیه پارامترها مانند قبل باشد، $IVaR$ برابر است با:

$$\%IVaR = -0.02\,(1+0.4)\times 1.645 = -0.0461$$
$$IVaR = -0.0461\times 100000 = -4610$$

همـان‌طور کـه ملاحظـه می‌کنیـد، اضافه‌شـدن دارایـی جدیـد بـه سـبد، ارزش درمعرض‌ریسـک افزایشـی منفـی ایجـاد می‌کنـد و ایـن بـدان معنـی اسـت کـه ارزش درمعرض‌ریسک کاهش می‌یابد. این امر به‌علت اثرات تنوع‌بخشی می‌باشد.

معایب رویکرد گارمن

از آنجا که رویکرد گارمن تنها تقریب‌هایی از $IVaR$ به‌دست می‌دهد، بنابراین فقط در حد تقریب مناسب است. وقتی که موقعیت یا معاملهٔ موردنظر نسبت به اندازهٔ سبد اولیه کوچک باشد، تقریب حاصل از این رویکرد رضایت‌بخش است و انتظار داریم که این رویکرد قابل‌اتکا باشد. با این وجود در دو حالت، این رویکرد از قابلیت اتکای کافی برخوردار نیست:

- اگر با معاملات بسیار بزرگی سروکار داشته باشیم، سری مرتبهٔ اول تیلور، تقریب مناسبی از ارزش درمعرض‌ریسک سبد جدید به‌دست نمی‌دهد و در این حالت تقریب $IVaR$ ممکن است دقت بالایی نداشته باشد.
- اگر تعداد زیادی معاملات کوچک داشته باشیم که در طول روز روی هم انباشته می‌شود، مجموع معاملات روزانه موجب می‌شود که ترکیب سبد در طول روز از آنچه که در آغاز روز بوده انحراف داشته باشد و متعاقباً ارزش درمعرض‌ریسک و مشتقات جزئی آن برای دارائی‌های سبد قدیمی به‌طرز فزاینده‌ای شاخصی ضعیف از این مقادیر در سبد جدید خواهد بود. این مقادیر غیردقیق به تخمین‌های غیردقیق از $IVaR$ منجر می‌شود.

اهمیت این مسائل به شرایط بستگی دارد. به هر حال می‌توان تخمین‌های $IVaR$ را با افزایش توالی ارزیابی‌های مجدد سبد، افزایش داد. در این راستا می‌توان ارزش درمعرض‌ریسک و مشتقات جزئی آن را بعد از انجام یک معاملهٔ بزرگ یا بعد از تعداد معینی از معاملات در طی دورهٔ معاملاتی، تجدیدارزیابی کرد.

ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء

برای محاسبهٔ ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء، ابتدا معیار تجزیهٔ سبد دارایی‌ها را انتخاب می‌کنیم. می‌توان ارزش درمعرض‌ریسک را بر اساس ابزار مالی موجود در سبد، طبقات دارایی[1]، میز معاملاتی و غیره به‌دست آورد. معیار تجزیهٔ سبد هر چه که باشد، ارزش

1. asset classes

درمعرض‌ریسک آن تابعی همگن و خطی از معیار تجزیهٔ موردنظر است. ویژگی‌های همگن‌بودن و خطی‌بودن به ما اجازه می‌دهد از قضیهٔ اولر[1] استفاده کنیم. مطابق این قضیه:

$$VaR = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial VaR}{\partial w_i} = \nabla \mathbf{VaR(p)}\, \mathbf{w} \quad (۱۰-۱۰)$$

اگر ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء برای «i»امین دارایی (ابزار مالی و یا معیار تجزیه) را با $CVaR_i$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$CVaR_i = w_i \frac{\partial VaR}{\partial w_i} \quad (۱۱-۱۰)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ فوق در رابطهٔ (۱۰-۱۰) خواهیم داشت:

$$VaR = \sum_{i=1}^{n} CVaR_i \quad (۱۲-۱۰)$$

که نشانگر تجزیهٔ ارزش درمعرض‌ریسک به ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء سبد است. نکتهٔ کلیدی $CVaR$ این است که ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء هر دارایی را بر اساس اندازهٔ هر موقعیت (یعنی w_i) و ارزش درمعرض‌ریسک نهایی و یا همان مشتق مرتبهٔ اول ارزش درمعرض‌ریسک نسبت به w_i تشریح می‌کند.

ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء، ایدهٔ خوبی راجع به نحوهٔ توزیع ریسک در سبد دارایی‌ها به‌دست می‌دهد و تمام عوامل مهم ریسک و نیز همبستگی‌ها را در نظر می‌گیرد. اگر $CVaR$ را به‌صورت رابطهٔ تقریبی زیر نشان دهیم، این مطالب به‌وضوح در آن مشاهده می‌گردد:

$$CVaR_i \approx w_i \frac{\Delta VaR}{\Delta w_i} = \frac{IVaR_i}{\Delta w_i / w_i} \quad (۱۳-۱۰)$$

1. Euler theorem

این رابطه به ما می‌گوید که $CVaR$ برابر است با $IVaR$ تقسیم بر نسبت تغییر در اندازهٔ نسبی موقعیت. یعنی $CVaR$ تقریباً نسبتی از $IVaR$ است و بنابراین به همان شیوهٔ $IVaR$ از جانب همبستگی‌ها تحت تأثیر قرار می‌گیرد و همانند $IVaR$ می‌توان بین سه حالت مختلف آن تمایز قائل شد.

- ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء بزرگ: $CVaR$ بزرگ به‌معنی سهم بالا در ریسک سبد دارایی است.
- ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء متوسط: $CVaR$ متوسط و مثبت گویای سهم متوسط در ریسک سبد دارایی می‌باشد.
- ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء منفی: $CVaR$ منفی نمایانگر پوشش‌های طبیعی است که قسمتی از ریسک مابقی سبد را جبران می‌کند.

$CVaR$، ریسک تفکیک‌شدهٔ سبد دارایی‌ها را بر اساس مبالغ ریالی در اختیارمان قرار می‌دهد، یعنی به ما می‌گوید که «i»امین موقعیت چند ریال ریسک به سبد دارایی تحمیل می‌کند. بنابراین، مجموع «$CVaR$»ها برابر ارزش درمعرض‌ریسک سبد است.

محدودیت‌های ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء

باید به خاطر داشته باشیم که $CVaR$ آن‌گونه که در روابط (۱۰-۱۰) تا (۱۰-۱۳) تعریف شده، محدودیت مهمی دارد، زیرا تحلیل نهایی آن یک تحلیل خطی است. حاصل‌جمع ریسک‌های اجزاء به ارزش درمعرض‌ریسک کل می‌انجامد، چراکه قضیهٔ اولر، تابع ارزش درمعرض‌ریسک را خطی و همگن در نظر می‌گیرد. اما، بهایی که برای این ویژگی جمع‌پذیری می‌پردازیم این است که فرض کنیم هر $CVaR$ حاصل‌ضرب اندازهٔ موقعیت در ارزش درمعرض‌ریسک نهایی است. این فرض محدودیتی را ایجاد می‌کند، چراکه نشان می‌دهد $CVaR$ نسبتی از اندازهٔ موقعیت است. پذیرش این فرض بدین معنی است که اگر اندازهٔ موقعیت را به اندازهٔ k درصد تغییر دهیم $CVaR$ نیز به اندازهٔ k درصد تغییر خواهد کرد. به‌طور واضح‌تر می‌توان گفت که این نسبت خطی تنها زمانی خوب کار می‌کند که هر موقعیت نسبت به کل سبد بسیار کوچک باشد و اگر اندازهٔ هر موقعیت نسبت

به اندازهٔ کل سبد قابل‌ملاحظه باشد، $CVaR$ محاسبه‌شده با این روش، تنها تقریبی از اثر هر موقعیت بر ارزش درمعرض‌ریسک سبد به‌دست می‌دهد.

اگر خواهان برآورد درستی از $CVaR$ هستیم، باید به $IVaR$ متوسل شویم و تفاوت بین ارزش درمعرض‌ریسک سبد با موقعیت موردنظر و بدون آن را به‌عنوان $CVaR$ در نظر بگیریم. در این‌صورت $IVaR$ برآورد دقیقی از اثر موقعیت بر ریسک سبد ایجاد می‌کند. متأسفانه این دقت، بهای مخصوص به خود را دارد. در این حالت خاصیت جمع‌پذیری را از دست می‌دهیم. بدین معنی که دیگر مجموع «$CVaR$»ها برابر ارزش درمعرض‌ریسک کل نخواهد بود و بدین ترتیب تعبیر «$CVaR$»ها به‌عنوان حاصل تجزیهٔ ریسک کل مشکل خواهد بود. به‌طور خلاصه اگر اندازهٔ موقعیت‌ها نسبت به کل سبد قابل‌ملاحظه باشد، تنها می‌توانیم امیدوار باشیم که $CVaR$، تخمین‌هایی تقریبی از اثرات موقعیت‌ها را بر ارزش درمعرض‌ریسک سبد به‌دست می‌دهد.

این مسائل می‌تواند مشکلاتی را در زمینهٔ مرتبط‌ساختن تخصیص سرمایه به ریسک فراهم آورد. اگر می‌خواهیم از $CVaR$ جهت تخصیص سرمایه استفاده کنیم، به برآورد دقیقی از $CVaR$ نیازمندیم و نیز خواهان آن هستیم که «$CVaR$»ها همچنان خاصیت جمع‌پذیری را حفظ کنند. این مسائل ما را با یک انتخاب مواجه می‌کند. ما می‌توانیم خاصیت جمع‌پذیری را حفظ کنیم و الزامات پوشش سرمایهٔ خود را بر سنجه‌هایی از ریسک اجزاء قرار دهیم که به‌طور بالقوه غیردقیق است و یا می‌توانیم برآوردهایمان را از $CVaR$ دقیق کنیم و بدانیم که این به معنای از دست دادن ویژگی جمع‌پذیری است. در این حالت ممکن است مجموع «$CVaR$»ها بیش از ارزش درمعرض‌ریسک کل و یا کمتر از آن گردد. در هر دو صورت ما با مشکلی مواجه هستیم که به‌لحاظ نظری هیچ راه‌حل مشخصی برای آن وجود ندارد.

حفظ خاصیت جمع‌پذیری ریسک‌های اجزاء بسیار ضروری است. بنابراین، تنها راه‌حل در چنین شرایطی استفاده از یک قاعدهٔ ساده است. به‌عنوان مثال می‌توانیم ابتدا برآوردی از «$CVaR$»ها به‌عمل بیاوریم، سپس اگر مجموع «$CVaR$»ها برابر با VaR نباشد، می‌توانیم با یک قاعدهٔ انتخابی، مقدار اختلاف را به موقعیت‌های مختلف تخصیص دهیم. مثلاً، می‌توانیم متناسب با برآوردهای اولیه از «$CVaR$»ها اقدام به تخصیص مقدار اختلاف نماییم. تجزیهٔ حاصل از این روش خیلی دقیق نیست ولی می‌توانیم با تقریب خوبی از ریسک‌های نسبی تشکیلات سبد دارایی آگاهی کسب کنیم. اگر قاعدهٔ سادهٔ ما منطقی

باشد، مسألهٔ جمع‌پذیری نسبت به آن‌چه که در نظریه بر آن تأکید می‌شـود، چنـدان جـدی نخواهد بود.

موارد استفادهٔ ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء

ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء به‌دلیل ویژگی‌ها و جذابیت‌هایش موارد استفادهٔ زیادی در مدیریت ریسک دارد. کندوکاو ریسک و گزارش‌دهی ریسک دو مورد از کاربردهای آن است که در ادامه به تشریح هرکدام می‌پردازیم.

کندوکاو ریسک‌ها

قابلیت تجمیع $CVaR$، در تشریح این‌که چگونه ارزش درمعرض‌ریسک را می‌توان به اجزای سازندهٔ آن تجزیه نمود، بسیار مفید است. هم‌چنین ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء به ما در تجزیهٔ ریسک به چنـدین سـطح کمـک می‌کنـد، به‌طوری‌کـه در هـر مرحلـه مجمـوع «$CVaR$»ها برابر ریسک کل سطح بعدی خواهد بود. بر این اساس می‌توانیم ریسک کل شرکت را به ریسک‌های اجزای مربوط به واحدهای تجاری بزرگ (مثلاً، بر اساس کشور یا ناحیه) تجزیه کنیم و نیز می‌توانیم ریسک این واحدهای تجاری را نیـز بـرای رسـیدن بـه ریسک واحدهای کوچک‌تر تجزیه نماییم و به همین ترتیب ادامه دهیم تا به سطح میزهای معاملاتی یا معامله‌گران برسیم.

ویژگی جمع‌پذیریِ $CVaR$ امکان کندوکاو ریسک را فراهم می‌آورد. می‌تـوان مقـدار عددی یک ریسک را تجزیه و یا اجزای آن را برای هر سطح منتخبی شناسـایی کـرد. هـر مؤسسه‌ای می‌تواند از کندوکاو ریسک برای تعیین سهم هـر واحـد از ریسـک کـل در هـر سطحی (معامله‌گر، ابزار، طبقهٔ دارایی، میز معاملاتی، شعبه، ناحیه و غیره) استفاده کند. نیاز به گفتن ندارد که این امکان کندوکاو، فواید عملی بسیار مهمی برای تعیین موقعیت‌هـا یـا واحدهای در خور توجه، شناسایی منابع پنهان ریسک، برقراری محدودیت‌ها، اخذ تصمیمات سرمایه‌گذاری، تعیین الزامات پوشش سرمایه، شکل‌دهی برنامه‌های پاداش و غیره به همراه دارد. بنابراین، نحوهٔ گزارش‌دهی ریسک اجزاء از اهمیت قابل‌توجهی برخوردار است.

گزارش‌دهی ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء

ارایهٔ گزارش‌های $CVaR$ به شکلی معنادار و به شیوه‌ای که طرف‌های ذی‌نفع بدون مشکل قادر به درک آن باشند، از اهمیت زیادی برخوردار است. برای بهبود روش گزارش‌دهی $CVaR$ موارد زیر پیشنهاد می‌شود:

- گزارش‌های مربوط به ارزش‌درمعرض‌ریسک اجزاء را باید به‌صورت گزارش‌هایی هدف‌دار ارایه نمود و برای هر مستمع گزارش مخصوصی فراهم آورد.
- گزارش‌ها باید تا حد امکان کوتاه و آسان باشند و اطلاعات مربوط به تجزیهٔ ریسک باید تا حد امکان شفاف بوده و از اطلاعات غیرضروری اجتناب گردد، چراکه باعث انحراف از نکات کلیدی می‌شود.
- گزارش‌ها باید مفروضات کلیدی را شناسایی کرده و در صورت اشتباه‌بودن آن‌ها، پیامدهای ممکن را خاطر نشان نماید.

برای نشان‌دادن گزارشی با ویژگی‌های یادشده، در جدول (۱۰-۱) نمونه‌ای از گزارش مربوط به تجزیهٔ ریسک یک سبد سهام را ارایه کرده‌ایم. این سبد شامل سرمایه‌گذاری در پنج بخش بانکداری، شیمیایی، انرژی، فلزات و ساختمان است. این یک گزارش بسیار ابتدایی است، ولی در عین حال، اطلاعات بسیار مهمی را به همراه دارد. در این گزارش مبنای تجزیه، بخش است. اندازهٔ سرمایه‌گذاری در هر بخش در دومین ستون ارایه شده است. ارزش درمعرض‌ریسک انفرادی[1] یا ارزش درمعرض‌ریسک بدون تنوع‌بخشی[2] در ستون سوم آمده و ستون چهارم نیز حامل ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء است.

بخش	سرمایه‌گذاری	VaR (انفرادی)	$CVaR$	$\%CVaR$
بانکداری	۱۰۰	۵/۳۷۳	۴/۳۴۳	۱۴٪/۲۹
شیمیایی	۱۰۰	۱۰/۵۵۹	۹/۴۶۳	۳۱٪/۱۴
انرژی	۱۰۰	۹/۰۶۳	۸/۳۳۴	۲۷٪/۴۲

1. stand alone VaR
2. undiversified VaR

فلزات	۱۰۰	۵/۸۲۶	۴/۳۵۰	۱۴٪/۳۱
ساختمان	۱۰۰	۵/۷۱۴	۳/۹۰۵	۱۲٪/۸۵
جمع	۵۰۰	۳۶/۵۳۵	۳۰/۳۹۵	۱۰۰٪
فرض کلیدی: عوامل ریسک دارای توزیع چندمتغیرهٔ نرمال است. اثر احتمالی در صورت نقض فرض کلیدی: ریسک‌ها دست‌پایین برآورد می‌شود.				

جدول (۱۰-۱): نمونه‌ای از گزارش تجزیهٔ ریسک

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، «$CVaR$»ها کمتر از ارزش درمعرض‌ریسک انفرادی است و این وضعیت مدیون اثر تنوع‌بخشی است. مجموع «$CVaR$»ها ارزش درمعرض‌ریسک سبد را با احتساب اثر تنوع‌بخشی به‌دست می‌دهد. این مقدار در گزارش ما ۳۰/۳۹۵ است. این مقدار را می‌توان با مجموع ارزش‌درمعرض‌ریسک انفرادی یعنی ۳۶/۵۳۵ مقایسه نمود. مقدار اخیر را می‌توان به‌عنوان ارزش درمعرض‌ریسک سبد، بدون در نظرگرفتن اثر تنوع‌بخشی یعنی با احتساب ضرایب همبستگی یک تعبیر نمود. نسبت ارزش درمعرض‌ریسک با احتساب و بدون احتساب تنوع‌بخشی ۸۳/۱۹٪ است و اثر تنوع‌بخشی برابر با ۱۰۰٪ منهای این نسبت، یعنی ۱۶/۸۱٪ می‌باشد. ستون آخر، «$CVaR$»ها را بر اساس درصدی از ارزش درمعرض‌ریسک سبد نشان می‌دهد. این درصدها از ۱۲/۸۵ برای بخش ساختمان تا ۳۱/۱۴ برای بخش شیمیایی متفاوت است. یعنی بخش ساختمان کمترین مشارکت و بخش شیمیایی بیشترین مشارکت را در ریسک سبد دارند. این حقیقت که درصدها همگی مثبت است، نشان می‌دهد که هیچ‌کدام از سرمایه‌گذاری‌ها، پوشش طبیعی ایجاد نمی‌کند. در نهایت این گزارش شامل مفروضات اساسی و پیامدهای احتمالی حاصل از اشتباه‌بودن آن‌هاست.

در گزارش ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء می‌توان علاوه بر تجزیهٔ سبد بر اساس بخش‌ها، به تجزیه بر اساس طبقات دارایی (مثلاً سهام، کالاها و ...)، عوامل ریسک بازار، معاملات یا موقعیت‌ها، واحدهای تجاری و ... جهت نیل به اهداف موردنظر اقدام نمود.

تجزیهٔ سنجه‌های منسجم ریسک

قبل از این برای راحتی فرض کردیم که سنجهٔ ریسک ما VaR است. بدیهی است که می‌توان از تحلیل‌های مشابهی برای سنجه‌های منسجم ریسک استفاده کرد. به‌عنوان مثال همیشه می‌توان سنجه‌های منسجم ریسک افزایشی[1] را بر اساس روابطی مانند رابطهٔ (۱۰-۱۰) تعریف کرد. هم‌چنین تحت شرایطی منطقی می‌توان یک سنجهٔ منسجم ریسک را با استفاده از قضیهٔ اولر به اجزای سازندهٔ آن تجزیه کرد.

به‌عنوان مثال، اگر سنجهٔ ریسک موردنظرمان ES باشد، قضیهٔ اولر به ما می‌گوید که:

$$ES = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial ES}{\partial w_i} \quad (۱۴-۱۰)$$

اگر متغیر موردنظر پیوسته باشد، ریزش موردانتظار نهایی[2] برابر است با:

$$\frac{\partial ES}{\partial w_i} = E\left[X_i \middle| X \leq -VaR\right] \quad (۱۵-۱۰)$$

این رابطه به ما می‌گوید که ریزش موردانتظار اجزاء[3] برابر است با:

$$CES_i = w_i E\left[X_i \middle| X \leq -VaR\right] \quad (۱۶-۱۰)$$

بنابراین تجزیهٔ سنجه‌های منسجم ریسک مشابه تجزیهٔ VaR است.

نتیجه‌گیری

جهت ایجاد تصویر واضح‌تری از ریسک سبد دارایی، تجزیهٔ ریسک کل به اجزای سازندهٔ آن بسیار مؤثر است. دو نوع مهم تجزیه وجود دارد که ما را در راستای نیل به این هدف یاری می‌کند: ریسک‌های افزایشی، تغییر ریسک کل را در اثر تغییر ترکیب سبد دارایی اندازه‌گیری می‌کند؛ ریسک‌های اجزاء، ارایه‌کنندهٔ سهم هرکدام از تشکیلات سبد

---

1. incremental coherent risk measures
2. marginal expected shortfall
3. component expected shortfall (CES)

دارایی در ریسک کل است. با تجزیهٔ ریسک می‌توان تغییرات ریسک سبد دارایی را کنترل کرده و ترکیب سبد را در جهت دستیابی به سطح مناسب ریسک، مورد تجدیدنظر قرار داد.

منابع

1. Beck, J.V. and Arnold, K.J. (1976), *Parameter Estimation in Engineering and Science*, John Wiley, New York NY.
2. Dowd, K. (2005), *Measuring Market Risk*, John Wiley & Sons Ltd, Second Edition.
3. Duffie, D. and Pan, J. (1997), "An overview of value at risk, *The Journal of Derivatives,* Vol. 5, No, 3, pp.7-49.
4. Garman, M. B. (1996a), *Making VaR More Flexible*, Derivatives Strategy, pp. 52-53.
5. Garman, M. B. (1996b**),** *Making VaR Proactive*, Berkely,CA: Financial Engineering Associates, FEA.
6. Garman, M.B. (1996c), *Improving on VaR*, RISK 9/5, May, pp.61-63.
7. Garman, M.B. (1997d), *Taking VAR to Pieces*, RISK 10/10, October, pp. 70-71.
8. Irina N. K and Svetlozar T. R. (2000), *Value at Risk: Recent Advances*, Chapman & Hall / CRC, 801-858.
9. Jorion, P. (2001), *Value at Risk*, McGraw-Hill, Second Edition.

فصل یازدهم

پس‌آزمایی ارزش درمعرض‌ریسک

مقدمه

در فصل‌های قبل پس از تعریف ریسک و تشریح ارزش درمعرض‌ریسک به مدل‌سازی ریسک پرداختیم و نحوهٔ توسعهٔ مدل‌های پارامتریک، ناپارامتریک و نیمه‌پارامتریک را مورد بررسی قرار دادیم. هم‌چنین چگونگی تجزیهٔ ارزش درمعرض‌ریسک در قالب $IVaR$ و $CVaR$ تشریح گردید. در این فصل به بررسی نحوهٔ سنجش اعتبار مدل‌های VaR می‌پردازیم.

پس‌آزمایی[1] چیست؟

بعد از توسعهٔ مدل و قبل از این‌که در عمل مورد استفاده قرار گیرد، اعتبار آن باید به‌دقت بررسی شود. هم‌چنین در حین استفاده از مدل عملکرد آن باید به‌طور مرتب ارزیابی گردد. یکی از مؤلفه‌های کلیدی اعتبارسنجی مدل، پس‌آزمایی آن است که شامل کاربرد روش‌های کمّی جهت تعیین مطابقت پیش‌بینی‌های مدل با مفروضاتی است که مدل بر اساس آن بنا شده است. مفروضات توزیعی نادرست در مدل‌های آماری، تغییرات بزرگ در تلاطم عوامل ریسک بازار، چالش‌های مربوط به مدل‌سازی وابستگی‌های زمانی موجود در

1. VaR backtesting

تلاطم‌های بازدهٔ سبد دارایی و فقدان انسجام از جملهٔ عـواملی اسـت کـه بـه برآوردهـایی نادرست از ریسک منجر می‌شود. در واقع، این عوامل مهم‌ترین عواملی اسـت کـه ممکـن است باعث عدم‌پذیرش یک مدل ریسک در پس‌آزمایی‌ها گردد. پس‌آزمایی هم‌چنین شامل رتبه‌بندی مدل‌های مختلف نیز می‌باشد. در این فصـل پـس از بیـان اهمیـت پس‌آزمـایی، روش‌های مطرح در این زمینه را مورد بررسی قرار داده و نحوهٔ ارزیابی عملکـرد مـدل‌های ارزش درمعرض‌ریسک را بررسی خواهیم کرد.

اهمیت پس‌آزمایی

اهمیت پس‌آزمایی در بهبود کارایی مدیریت ریسک و کفایت سنجه‌های ریسک نهفته است. کمیتهٔ بال در پیمان سال ۱۹۹۶ اذعان نمود که ماهیـت تمـامی تلاش‌هـایی کـه در جهت پس‌آزمایی صورت می‌گیـرد، مقایسـهٔ نتـایج حاصـل از معـاملات واقعـی بـا مقـادیر ایجادشده توسط مدل است.[1]

پس‌آزمایی از دیدگاه سازمانی دارای مزایای بی‌شماری است. فایـدهٔ اصـلی مـدیریت اثربخش ریسک، آزادسازی سرمایه در جهت عملیات سازمانی است. اگر یک سنجهٔ ریسک عملکرد خوبی نداشته باشد و گزارش‌های وخیمی از احتمال زیان به‌دست آورد، مقـام نـاظر سرمایهٔ بیشتری برای پوشش ریسک مؤسسهٔ مالی منظور می‌کند. سنجهٔ ریسکی که بسیار محافظه‌کارانه عمل می‌کند، الزامات سرمایه را بیش از اندازه بالا می‌برد. محرک دیگری که مؤسسات مالی را به پس‌آزمایی متمایل می‌کند، موقعیت‌هـایی اسـت کـه ذخیـرهٔ سـرمایه پوشش‌دهندهٔ ریسک مؤسسـه نیسـت. یعنـی، زمـانی کـه مـدل‌های ریسـک، تلاطم‌هـای معاملات را به‌درستی برآورد نمی‌کنند و متعاقباً الزامـات سـرمایه را بـرای مؤسسـات مـالی افزایش نمی‌دهند. پس‌آزمایی به افزایش دقت مدیریت ریسک و تعیین دقیق ذخیرهٔ سرمایه کمک می‌کند. هم‌چنین پس‌آزمایی، احتمال ورشکستگی را کاهش می‌دهد، چراکه مؤسسـه را در جهت پیش‌بینی زیان‌های بزرگ توانمند می‌سازد.

پس‌آزمایی مزایای اقتصادی غیرمستقیمی نیز دارد. با استفاده از پس‌آزمایی، سازمان‌ها نیاز کمتری به بازبینی مدل‌های ریسک خواهند داشت، زیرا فرآیند پس‌آزمـایی کارآمـد بـه

1. Basel (1996), p. 1.

افزایش دقت سنجه‌های ریسک منجر می‌شود. مدل‌های پس‌آزمایی VaR به ما در جهت شناسایی مزایا و معایب هر مدل کمک می‌کند. پس‌آزمایی تنها شامل گزارش و کنترل ریسک نمی‌شود بلکه عهده‌دار توسعهٔ مستمر فرآیندها و محک‌زنی کارآمدی سیستم‌ها نیز می‌باشد و به این ترتیب، توسعهٔ پایدار مدیریت ریسک را به ارمغان می‌آورد.

الزامات سرمایه و پس‌آزمایی

بر اساس پیمان‌های کمیتهٔ بال، بانک‌ها باید جهت پوشش ریسک‌هایی از قبیل ریسک بازار، اعتباری و عملیاتی، سرمایهٔ کافی نگهداری کنند. این سرمایه به هنگام بروز بحران، احتمال ورشکستگی مؤسسه را کاهش می‌دهد. حداقل سرمایهٔ کل الزامی[1] برای هر بانک برابر است با مجموع سرمایهٔ لازم برای پوشش ریسک بازار[2]، سرمایهٔ لازم برای پوشش ریسک اعتباری[3] و سرمایهٔ لازم برای پوشش ریسک عملیاتی[4].

حداقل سرمایهٔ لازم برای پوشش ریسک بازار بر اساس مقدار VaR و عملکرد مدل VaR در پس‌آزمایی محاسبه می‌شود. پیش‌نیاز تعیین سرمایهٔ الزامی ریسک بازار این است که مقام ناظر مدل ارزش درمعرض‌ریسک مورد استفادهٔ سازمان را در جهت محاسبهٔ سرمایهٔ الزامی مورد تأیید قرار دهد. سرمایهٔ الزامی برای پوشش ریسک بازار هر بانک برابر با حداکثر مقدار از بین آخرین ارزش درمعرض‌ریسک بانک در سطح اطمینان ۹۹٪ و افق پیش‌بینی ۱۰روزه و حاصل‌ضرب یک ضریب در میانگین ارزش درمعرض‌ریسک ۶۰ روز گذشتهٔ بانک در سطح اطمینان ۹۹٪ و افق پیش‌بینی ۱۰روزه می‌باشد که این ضریب بر اساس عملکرد سنجهٔ VaR در پس‌آزمایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. سرمایهٔ الزامی ریسک بازار بانک‌ها بر اساس رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$MCR_t = \max\left(VaR_t(10, 0.01); \lambda_t \frac{1}{60} \sum_{t=0}^{59} VaR_{t-1}(10, 0.01) \right) \quad (۱-۱۱)$$

1. minimum total capital requirement (MTCR)
2. market risk capital requirement (MCR)
3. credit risk capital requirement (CCR)
4. operational risk capital requirement (OCR)

که $VaR_t(k,\alpha)$ نمایان‌گر ارزش درمعرض‌ریسک در زمان t در سطح پوشش[۱] α (سطح اطمینان $1-\alpha$) برای یک دورهٔ نگهداری «k»روزه می‌باشد و λ_t ضریب فزاینده در زمان t است که مقدار آن طی رابطه‌ای تعیین می‌شود. رابطهٔ فوق جهت تعیین کل سرمایه الزامی ریسک بازار باید شامل مجموع موقعیت‌های سبد دارایی‌های بانک باشد.

چارچوب قانونی برای تعیین λ_t شامل سه منطقهٔ سبز، زرد و قرمز است. بر اساس نتایج پس‌آزمایی، مدل ریسک بانک در یکی از این نواحی جای می‌گیرد. این طبقه‌بندی بر پایهٔ تعداد تخطی‌ها[۲] از ارزش درمعرض‌ریسک یک‌روزه و ۹۹٪ است. تعداد تخطی‌ها با مقایسهٔ زیان واقعی و VaR در طی ۲۵۰ روز گذشته استخراج می‌شود. تعداد تخطی‌ها تعیین‌کنندهٔ ضریب فزایندهٔ λ_t است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_t = \begin{cases} 3.00 & if \;\; V \le 4 \quad \text{green} \\ 3.40 + 0.10(V-5) & if \;\; 5 \le V \le 6 \quad \text{yellow} \\ 3.65 + 0.10(V-7) & if \;\; 7 \le V \le 9 \quad \text{yellow} \\ 4.00 & if \;\; V \ge 10 \quad \text{red} \end{cases} \qquad (۲-۱۱)$$

در این‌جا تعداد تخطی‌های VaR را با V نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که چارچوب پس‌آزمایی قانونی شامل استفاده از ارزش درمعرض‌ریسک یک‌روزه است، در حالی‌که چارچوب قانونی برای سرمایهٔ الزامی ریسک بازار، مستلزم استفاده از ارزش درمعرض‌ریسک ۱۰روزه است. از رابطهٔ فوق چنین برداشت می‌شود که مدل ریسکی که برآوردهای خیلی محافظه‌کارانه از ریسک به‌دست می‌دهد، ریسک را زیاد گزارش می‌کند و سرمایهٔ الزامی را افزایش می‌دهد. از طرفی دیگر، مدلی که تخمین‌های خیلی جسورانه از ریسک ارایه می‌دهد، تخطی‌های بیش از اندازه ایجاد می‌کند و متعاقباً سرمایهٔ الزامی از طریق ضریب فزاینده افزایش می‌یابد. این امر ما را به معرفی یک فرآیند پس‌آزمایی نظام‌مند تشویق می‌کند تا به‌وسیلهٔ آن ناکارآمدی‌های مدل را شناسایی و دقت مدل‌های VaR را افزایش دهیم.

---

1. coverage level
2. violations

رویکردهای پس‌آزمایی

هم‌اکنون روش‌های پس‌آزمایی متعددی برای ارزیابی دقت مدل‌های VaR و ویژگی‌های آن وجود دارد. بسیاری از این مدل‌ها در سال‌های اخیر توسعه یافته‌اند. با وجود ظهور مستمر روش‌های جدید پس‌آزمایی، هنوز فضای زیادی برای بهبود روش‌های فعلی و توسعهٔ روش‌های جدید وجود دارد. در حال حاضر هیچ روش استانداردی برای پس‌آزمایی وجود ندارد و رهنمودهای قانونی تنها مستلزم محاسبهٔ VaR و استفاده از رویکرد نواحی سه‌گانه است.

به‌لحاظ نظری مفهوم پس‌آزمایی بسیار نوپاست، چراکه خودِ ارزش درمعرض‌ریسک به‌طور رسمی در سال ۱۹۹۳ معرفی شد. دو تن از پیشگامان پس‌آزمایی به نام‌های کریستوفرسن و پلتیر اذعان نموده‌اند که تاکنون تعداد نسبتاً کمی روش مناسب جهت پس‌آزمایی ارزش درمعرض‌ریسک توسعه یافته است.[۱]

تمایل فزاینده جهت ارایهٔ روش‌های جدید پس‌آزمایی ارزش درمعرض‌ریسک از توصیه‌های قانونی و نظارتی راجع به نقش VaR در مدیریت ریسک بازار نشأت گرفته است. با وجود انتقادهایی که پیرامون ویژگی‌های آماری VaR و برخی مباحث نظری آن وجود دارد، ابزارهای مدیریت ریسک زیادی بر اساس این سنجهٔ ریسک توسعه یافته است. کمیتهٔ بال در پیمان دوم خود پایه‌های حرکت به‌سوی روش‌های دقیق‌تر پس‌آزمایی و استقرار یک فرآیند واقعی پس‌آزمایی را بنا نمود. این کمیته طی نسخهٔ جامع پیمان دوم که در سال ۲۰۰۶ منتشر شد، علاوه بر استفاده از چارچوب قانونی برای اعتبارسنجی مدل‌های VaR، استفاده از دیگر روش‌های پس‌آزمایی را نیز توصیه کرد.[۲] هم‌چنین کمیتهٔ بال بانک‌ها را به افزایش دامنهٔ پس‌آزمایی‌های هر مدل تشویق می‌کند. به‌عنوان مثال این پس‌آزمایی‌ها شامل پس‌آزمایی با استفاده از دوره‌های آزمون طولانی‌تر، نرخ‌های پوشش مختلف، آزمون بر اساس بازده‌های فرضی حاصل از تغییرات نظری قیمت دارایی و آزمون بر اساس سبدهای تجزیه‌شده برای تمامی سطوح بانک می‌باشد.

---

1. Christofferson and Pelletier (2004), p. 86.
2. Basel II (2006), p. 193.

می‌توان بر اساس ویژگی‌هایی که در پس‌آزمایی مورد آزمون قرار می‌گیرد، گروه‌بندی‌ای از رویکردهای پس‌آزمایی ارایه داد. دو گروه اول مربوط به آزمون‌های کارایی ارزش درمعرض‌ریسک است.

گروه اول شامل آزمون‌های ارزیابی کارایی مدل در یک سطح پوشش خاص است. در این گروه، تخطی‌های موجود در مجموعهٔ اطلاعات Ω_{t-1} تنها مرجع مورد استفاده برای آزمون مدل ارزش درمعرض‌ریسک در سطح پوشش α است. این آزمون‌ها که به ارزیابی رخداد یک واقعه (مانند تخطی) در طی زمان می‌پردازد، در گروه رویکرد پیش‌بینی احتمال رویداد[1] جای می‌گیرند.

گروه دوم شامل آزمون‌هایی است که به بررسی هم‌زمان کارایی ارزش درمعرض‌ریسک برای تمامی سطوح پوشش ممکن می‌پردازد. بنابراین، این آزمون‌ها تنها به مطالعهٔ یک سطح پوشش انتخابی (مثلاً، ۵٪) محدود نیست. در این آزمون‌ها، توزیع بازده و یا توزیع سود و زیان به‌طور کامل مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. این آزمون‌ها در گروه رویکرد پیش‌بینی چگالی[2] قرار می‌گیرد.

توجه داشته باشید که در پس‌آزمایی‌های مربوط به این دو رویکرد همیشه صحبت از دو سطح اطمینان است. یک سطح اطمینان به VaR مربوط می‌شود و دیگری به آزمون‌های آماری برمی‌گردد. برای ایجاد تمایز بین این دو سطح اطمینان، برای ارزش درمعرض‌ریسک به‌جای سطح اطمینان از سطح خطا استفاده می‌کنیم و باز هم برای کاهش تداخل، سطح پوشش را معادل سطح خطای ارزش درمعرض‌ریسک در نظر می‌گیریم. مثلاً، VaR در سطح پوشش ۵٪ به‌معنی ارزش‌درمعرض‌ریسک در سطح اطمینان ۹۵٪ است. بدین ترتیب، ممکن است بخواهیم یک مدل VaR در سطح پوشش ۱٪ را در سطح اطمینان ۹۵٪ بر اساس یکی از رویکردهای پس‌آزمایی، آزمون نماییم.

گروه سوم رویکردهای پس‌آزمایی رویکرد مقایسه‌ای است[3] که به مقایسه و رتبه‌بندی مدل‌های مختلف ارزش‌در معرض‌ریسک می‌پردازند.

بر اساس گروه‌بندی یادشده، رویکردهای پس‌آزمایی عبارت است از:

---

1. event probability forecast approach
2. density forecast approach
3. comparing approach

- رویکرد پیش‌بینی احتمال رویداد
- رویکرد پیش‌بینی چگالی
- رویکرد مقایسه‌ای

در ادامهٔ فصل، به تشریح هرکدام از این رویکردها می‌پردازیم.

رویکرد پیش‌بینی احتمال رویداد

مدل‌های موجود در این رویکرد بسیار متنوع‌اند. برخی از مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از: آزمون کوپیک، آزمون کریستوفرسن، آزمون اختلاف شرط‌بندی، آزمون انگل و منگانلی که در این‌جا به تشریح هرکدام می‌پردازیم.

آزمون کوپیک[1]

اولین راه منطقی برای ارزیابی توانایی پیش‌بینی مدل‌های VaR شمارش دفعاتی است که مقدار زیان واقعی از مقدار زیان پیش‌بینی‌شده توسط VaR بزرگ‌تر بوده است. چنانچه زیان واقعی از زیان برآوردشده توسط مدل بیشتر باشد، آنگاه این رویداد به‌عنوان یک شکست (تخطی) محسوب می‌شود و اگر زیان واقعی کوچک‌تر از زیان برآوردشده باشد، این رویداد به‌عنوان یک موفقیت (عدم‌تخطی) ثبت می‌شود. اگر رویداد دورهٔ t در سطح پوشش α را با $I_t(\alpha)$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & if\ r_t < -\%VaR_{t|t-1}(\alpha) \\ 0 & else \end{cases} \quad (۳-۱۱)$$

که r_t بازدهٔ تحقق‌یافته در دورهٔ t و $\%VaR_{t|t-1}$ ارزش درمعرض‌ریسک درصدی دورهٔ t مشروط بر اطلاعات موجود تا دورهٔ $t\text{-}1$ است.

1. Kupiec test

چنانچه «VaR»های هر دوره مستقل فرض شود، آن‌گاه مقایسهٔ نتـایج سـود و زیـان تحقق‌یافته با ارزش درمعرض‌ریسک محاسبه‌شده به یـک توزیـع دو جملـه‌ای می‌انجامـد. بنابراین، به‌منظور آزمون دقت مدل باید فرضیهٔ صفر زیر را مورد آزمون قرار دهیم:

$$\sum_{t=1}^{T} I_t(\alpha) = B(T,\alpha) \quad (۴-۱۱)$$

عبارت فوق گویای ایـن اسـت کـه مجمـوع تعـداد تخطی‌هـا از مقـدار VaR (تعـداد شکست‌ها) دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای T و α اسـت کـه T تعـداد نمونـه و α سطح پوشش است. بنابراین فرضیهٔ آماری را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

H_0: مجموع تخطی‌ها دارای توزیع دو جمله‌ای است.

H_1: مجموع تخطی‌ها دارای توزیع دو جمله‌ای نیست.

یک معیار مهم برای آزمون این فرضیه توجه به نسبت تخطی[1] یـا نسـبت شکسـت[2] است که از طریق تعداد تخطی‌ها بر کل تعداد پیش‌بینی‌ها به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر، برای آزمون فرضیهٔ فوق می‌توان فرضیهٔ برابری نسبت شکسـت و سـطح پوشـش را مـورد آزمون قرار داد:

$$\begin{cases} H_0: & \hat{\alpha} = \alpha \\ H_1: & \hat{\alpha} \neq \alpha \end{cases} \quad (۵-۱۱)$$

که $\hat{\alpha}$ نسبت تعداد تخطی‌ها به کل پیش‌بینی‌ها یا همان نسبت شکست است.

کوپیک به منظور بررسی فرضیهٔ اخیر، آزمون نسـبت احتمـال شکسـت‌ها را پیشـنهاد می‌کند. این نسبت احتمال دارای توزیـع کـای‌دو بـا یـک درجـهٔ آزادی اسـت و آمـارهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$LR_{PF} = 2Ln\left[\frac{\hat{\alpha}^{T_1}(1-\hat{\alpha})^{T-T_1}}{\alpha^{T_1}(1-\alpha)^{T-T_1}}\right] \quad (۶-۱۱)$$

1. violation ratio
2. failure ratio

LR_{PF}: نسبت احتمال شکست

T_1: تعداد شکست‌ها

T: تعداد کل پیش‌بینی‌ها

$\hat{\alpha}$ و α : به‌ترتیب، نسبت شکست و سطح پوشش

در صورتی که نسبت احتمال شکست بزرگ‌تر از توزیع کای‌دو با یک درجهٔ آزادی و سطح خطای α باشد، فرضیهٔ صفر رد می‌شود و نمی‌توان پذیرفت که مدل ارزش درمعرض‌ریسک، ریسک را به‌درستی برآورد می‌کند. اگر فرضیهٔ صفر رد شود و $\hat{\alpha} > \alpha$، مدل VaR ریسک را دست بالا برآورد می‌کند و اگر فرضیهٔ صفر رد شود و $\hat{\alpha} < \alpha$، مدل VaR ریسک را دست پایین برآورد می‌کند.

آزمون کریستوفرسن

با توجه به وجود خوشه‌های تلاطم در سری بازدهٔ مالی، انتظار می‌رود که مدل‌های ارزش درمعرض‌ریسک با مدل‌سازی پویایی‌های تلاطم و شناسایی خوشه‌ها، در صورت ایجاد تخطی از مقدار ارزش درمعرض‌ریسک از تخطی‌های متوالی، بعدی جلوگیری کند. به همین دلیل آزمون مدل از حیث دقتِ مشروط بر استقلال تخطی‌های متوالی حائز اهمیت است. در این راستا نسبت احتمال پوشش شرطی[۱] $\left(LR_{CC}\right)$ از جانب کریستوفرسن به‌عنوان آزمونی برای سطح پوشش شرطی[۲] پیشنهاد شد.[۳] دلیل اصلی معرفی چنین آزمونی این بود که نسبت احتمال شکست (LR_{PF}) وجود وابستگی‌های زمانی را نادیده می‌گرفت. آزمون نسبت احتمال پوشش شرطی، ترکیبی از آزمون سطح پوشش غیرشرطی[۴] و استقلال زنجیره‌ای[۵] است.

$$LR_{CC} = LR_{UC} + LR_{ind} \quad (۷-۱۱)$$

1. conditional coverage likelihood ratio
2. conditional coverage level
3. Christoffersen (1998).
4. unconditional coverage level
5. serial independence

در این‌جا ابتدا آزمون پوشش غیرشرطی را مورد بررسی قرار داده و سپس در مورد آزمون استقلال به بحث می‌پردازیم و در نهایت آزمون پوشش شرطی را از نظر می‌گذرانیم.

برای آزمون پوشش شرطی فرضیهٔ آماری به این صورت بیان می‌گردد:

$$I_t(\alpha) \overset{iid}{\sim} Bernoulli(\alpha) \quad (۸-۱۱)$$

مطابق این فرضیه، هر تخطی دارای توزیع برنولی با احتمال شکست α است. هم‌چنین این توزیع‌ها مستقل از هم است. بنابراین آزمون این فرضیه دارای دو قسمت می‌باشد. یک قسمت به آزمون پوشش غیرشرطی مربوط می‌شود که مطابقت تخطی‌های مشاهده‌شده را با توزیع برنولی می‌سنجد و قسمت بعدی استقلال این توزیع‌ها را مورد آزمون قرار می‌دهد.

آزمون پوشش غیرشرطی

برای آزمون پوشش غیرشرطی فرضیهٔ صفر را به‌این صورت بیان می‌کنیم که نسبت تعداد تخطی‌های مشاهده‌شده به کل تخطی‌ها ($\hat{\alpha}$) برابر با نسبت پیش‌بینی‌شده توسط مدل (α) یعنی سطح پوشش است. یعنی:

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\alpha} = \alpha \\ H_1 : \hat{\alpha} \neq \alpha \end{cases} \quad (۹-۱۱)$$

ارزش احتمال[1] تحت فرضیهٔ صفر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$Bernoulli(\alpha) = (1-\alpha)^{(1-I_t)} \alpha^{I_t} \quad (۱۰-۱۱)$$

و برای تعداد T پیش‌بینی که در واقع T تکرار برنولی نیز می‌باشد، ارزش احتمال تحت فرضیهٔ صفر برابر است با:

$$L(\alpha) = \prod_{t=1}^{T} (1-\alpha)^{(1-I_t)} \alpha^{I_t} = (1-\alpha)^{T_0} \alpha^{T_1} \quad (۱۱-۱۱)$$

1. likelihood value

که T تعداد کل پیش‌بینی‌ها، T_1 تعداد تخطی‌ها و T_0 تعداد موارد تخطی‌نشده است. T_1 و T_0 به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$T_1 = \sum_{t=1}^{T} I_t \qquad (۱۲-۱۱)$$

$$T_0 = T - T_1 \qquad (۱۳-۱۱)$$

ارزش احتمال مشاهده‌شده[1] از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$L(\hat{\alpha}) = (1-\hat{\alpha})^{T_0}\,\hat{\alpha}^{T_1} \quad (۱۴-۱۱)$$

بدین ترتیب پوشش غیرشرطی از طریق آمارهٔ نسبت احتمال زیر آزمون می‌گردد:

$$LR_{UC} = 2Ln\left[\frac{L(\hat{\alpha})}{L(\alpha)}\right] \sim \chi^2(1) \quad (۱۵-۱۱)$$

اگر عدد حاصل از این نسبت احتمال بزرگ‌تر از مقدار توزیع کای‌دو با درجهٔ آزادی یک باشد، فرضیهٔ صفر رد می‌شود. در این آزمون به‌طور ضمنی فرض استقلال تخطی‌ها در نظر گرفته می‌شود، درحالی‌که صحت این فرض زیر سؤال است.

مثال (۱۱-۱): پوشش غیرشرطی

فرض کنید که بر اساس یک مدل ارزش درمعرض‌ریسک در سطح اطمینان ۹۵٪، تعداد ۵۰۰ پیش‌بینی از ارزش درمعرض‌ریسک هر دوره در اختیار داریم. اگر در این ۵۰۰ پیش‌بینی تعداد ۳۰ تخطی وجود داشته باشد با کاربرد آزمون پوشش غیرشرطی خواهیم داشت:

$$LR_{UC} = 2Ln\left[\frac{(1-0.06)^{570}\,0.06^{30}}{(1-0.05)^{570}\,0.05^{30}}\right] = 1.1243$$

1. observed likelihood value

مقدار توزیع کای‌دو با درجهٔ آزادی ۱ در سطح بحرانی ۵٪ برابر با ۳/۸۴۱۵ است. بدین ترتیب فرضیهٔ صفر رد نمی‌شود. یعنی تعداد تخطی‌های مدل به‌لحاظ آماری تفاوت قابل‌ملاحظه‌ای با تعداد تخطی‌های موردانتظار ندارد. بنابراین، مدل یادشده از آزمون پوشش غیرشرطی سربلند بیرون آمده است.

آزمون استقلال

کریستوفرسن (۱۹۹۸) نسبت آزمون استقلال را از طریق زنجیرهٔ مرتبهٔ اول مارکوف[۱] ارایه کرد. برای انجام آزمون استقلال« I_t »ها، یک ماتریس گذار احتمال[۲] برای زنجیرهٔ مرتبهٔ اول مارکوف تشکیل می‌گردد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} \hat{\pi}_{00} & \hat{\pi}_{01} \\ \hat{\pi}_{10} & \hat{\pi}_{11} \end{bmatrix} \quad (۱۶\text{–}۱۱)$$

که $\hat{\pi}_{ij}$ به‌صورت احتمال رخداد حالت j مشروط بر رخداد حالت i تعریف می‌شود.

$$\hat{\pi}_{ij} = \Pr[I_t = j \,|\, I_{t-1} = i], \quad i, j = 0,1 \quad (۱۷\text{–}۱۱)$$

علامت «^» در بالای Π و π_{ij} بدین معناست که ماتریس گذار و اعضای آن بر اساس حالت‌های مشاهده‌شده سازمان یافته است. در آزمون استقلال تنها به‌دنبال بررسی استقلال مشاهدات از یکدیگر هستیم. در این‌جا آزمون برابری نسبت پوشش موردانتظار (α) و مشاهده‌شده ($\hat{\alpha}$) هدف ما نیست. بنابراین ماتریس گذار را بر اساس حالت‌های مشاهده‌شده تشکیل می‌دهیم.

« π_{ij} »های مشاهده‌شده را با استفاده از روابط زیر محاسبه کرده و در ماتریس گذار قرار می‌دهیم.

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{T_{01}}{T_{01} + T_{00}} \qquad \hat{\pi}_{11} = \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}} \quad (۱۸\text{–}۱۱)$$
$$\hat{\pi}_{00} = 1 - \hat{\pi}_{01} \qquad \hat{\pi}_{10} = 1 - \hat{\pi}_{11}$$

---

1. first order Markov-chain
2. probability transition matrix

که T_{ij} نشانگر تعداد مشاهداتی است که در آن‌ها حالت j بعـد از حالـت i روی داده است.

زمانی «I_t»های متوالی مستقل از هم است که ماتریس گذار مشاهده‌شـده ($\hat{\Pi}$) بـه لحاظ آمـاری تفـاوت قابل‌ملاحظـه‌ای بـا ماتریسـی کـه بـر اسـاس اسـتقلال مشـاهدات تشکیل‌شده ($\Pi_{\hat{\alpha}}$) نداشته باشد. بنابراین فرضیهٔ صفر را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_0 : \hat{\Pi} = \Pi_{\hat{\alpha}} \qquad (۱۹-۱۱)$$

برای ایجاد $\Pi_{\hat{\alpha}}$ کافی است کـه در مـاتریس گـذار بـه جـای «$\hat{\pi}_{ij}$»هـا، احتمـالات غیرشرطی جایگزین گردد:

$$\Pi_{\hat{\alpha}} = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 \\ \pi_0 & \pi_1 \end{bmatrix} \quad (۲۰-۱۱)$$

که π_j برابر با احتمال رخداد حالت j می‌باشد.

$$\hat{\pi}_j = \Pr[I_t = j] \quad (۲۱-۱۱)$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$H_0 : \begin{bmatrix} \hat{\pi}_{00} & \hat{\pi}_{01} \\ \hat{\pi}_{10} & \hat{\pi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\hat{\pi}_{01} & \hat{\pi}_{01} \\ 1-\hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 \\ \pi_0 & \pi_1 \end{bmatrix} (۲۲-۱۱)$$

بدیهی اسـت کـه $\pi_0 = 1 - \pi_1$، بنـابراین می‌تـوان فرضـیهٔ صـفر را به‌صـورت زیـر بازنویسی کرد:

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1-\hat{\pi}_{01} & \hat{\pi}_{01} \\ 1-\hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\pi_1 & \pi_1 \\ 1-\pi_1 & \pi_1 \end{bmatrix} (۲۳-۱۱)$$

بدین ترتیب، فرضیهٔ صفر را می‌توان چنین خلاصه نمود:

$$H_0 : \hat{\pi}_{01} = \hat{\pi}_{11} = \pi_1 (۲۴-۱۱)$$

طبق تعریف $\pi_1 = \hat{\alpha}$، بنابراین:

$$H_0 : \hat{\pi}_{01} = \hat{\pi}_{11} = \hat{\alpha} \quad (۲۵-۱۱)$$

ارزش احتمال تحت فرضیهٔ صفر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$L(\Pi_{\hat{\alpha}}) = (1-\hat{\alpha})^{T_0} \hat{\alpha}^{T_1} \quad (۲۶-۱۱)$$

ارزش احتمال مشاهدات نیز از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$L(\hat{\Pi}) = (1-\hat{\pi}_{01})^{T_{00}} \hat{\pi}_{01}{}^{T_{01}} (1-\hat{\pi}_{11})^{T_{10}} \hat{\pi}_{11}{}^{T_{11}} \quad (۲۷-۱۱)$$

بدین ترتیب آمارهٔ آزمون استقلال از طریق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود.

$$LR_{ind} = 2Ln\left[\frac{L(\hat{\Pi})}{L(\Pi_{\hat{\alpha}})}\right] \sim \chi^2(1) \quad (۲۸-۱۱)$$

آمارهٔ آزمون استقلال همانند پوشش غیرشرطی از نوع نسبت احتمال می‌باشد و فرضیهٔ صفر استقلال زنجیره‌ای را در برابر فرضیهٔ وابستگی مرتبهٔ اول مارکوف آزمون می‌کند.

مثال (۱۱-۲): آزمون استقلال

فرض کنید که بر اساس یک مدل ارزش درمعرض‌ریسک در سطح اطمینان ۹۵٪، تعداد ۵۰۰ پیش‌بینی از ارزش درمعرض‌ریسک هر دوره در اختیار داریم. در این ۵۰۰ پیش‌بینی، تعداد ۳۰ تخطی وجود دارد. فرض کنید که رخداد تمامی این تخطی‌ها به‌صورت متوالی است. بر اساس آزمون استقلال خواهیم داشت:

$$LR_{ind} = 2\ln\left[\frac{(1-0.0021)^{469}\,0.0021(1-09667)0.9667^{29}}{(1-0.06)^{470}(0.06)^{30}}\right] = 203.89$$

از آنجا که مقدار $\chi^2(0.05,1)$ برابر با ۳/۸۴۱۴ می‌باشد، فرضیهٔ صفر در سطح اطمینان ۹۵ درصد رد می‌شود. به‌عبارتی دیگر تخطی‌های مشاهده‌شده مستقل از هم نیست. به بیانی دیگر مدل یادشده در آزمون استقلال نمرهٔ قبولی کسب نکرده است.

آزمون پوشش شرطی

همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، آزمون پوشش شرطی شامل دو فرضیهٔ پوشش غیرشرطی و استقلال می‌باشد. آمارهٔ این دو آزمون را می‌توان برای دستیابی به آمارهٔ آزمون پوشش شرطی ترکیب کرد. برای آزمون این فرضیه، کریستوفرسن فرض کرد که تخطی‌های هر دوره یعنی $I_t(\alpha)$ با یک زنجیرهٔ مارکوف مدل‌سازی می‌شود. این زنجیره به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} \hat{\pi}_{00} & \hat{\pi}_{01} \\ \hat{\pi}_{10} & \hat{\pi}_{11} \end{bmatrix} \quad (۲۹-۱۱)$$

این ماتریس، همان ماتریس گذار احتمالاتِ مشاهده‌شده است. فرضیهٔ صفر برای آزمون پوشش شرطی تخطی‌ها، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_0 : \hat{\Pi} = \Pi_\alpha = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{bmatrix} \quad (۳۰-۱۱)$$

Π_α ماتریس گذار موردانتظار بر اساس سطح پوشش α است. به‌طور ساده‌تر داریم:

$$H_0 : \hat{\pi}_{01} = \hat{\pi}_{11} = \alpha \quad (۳۱-۱۱)$$

ارزش احتمال تحت فرضیهٔ صفر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L(\Pi_\alpha) = (1-\alpha)^{T_0} \alpha^{T_1} \quad (۳۲-۱۱)$$

ارزش احتمال مشاهدات نیز از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$L(\hat{\Pi}) = (1-\hat{\pi}_{01})^{T_{00}} \hat{\pi}_{01}^{\,T_{01}} (1-\hat{\pi}_{11})^{T_{01}} \hat{\pi}_{11}^{\,T_{11}} \quad (۳۳-۱۱)$$

بدین ترتیب آمارهٔ آزمون پوشش شرطی را می‌توان با رابطهٔ (۱۱-۳۴) محاسبه نمود:

$$LR_{CC} = 2Ln\left[\frac{L(\hat{\Pi})}{L(\Pi_\alpha)}\right] \sim \chi^2(2) \quad (۳۴-۱۱)$$

آزمون پوشش شرطی، شرط کافی برای بررسی دقت مدل‌های ارزش درمعرض‌ریسک را لحاظ می‌کند. هم‌چنین، استفاده از آن در جهت تعیین اعتبار مدل‌ها آسان است. درصورتی‌که مدل ارزش درمعرض‌ریسک هریک از شرایط پوشش غیرشرطی و استقلال را تأمین ننماید، جزء مدل‌های غیرمعتبر طبقه‌بندی می‌شود. آزمون پوشش شرطی نسبت به پوشش غیرشرطی و استقلال قوی‌تر است، چراکه شامل هر دو می‌شود. هم‌چنین، آزمون پوشش شرطی نسبت به کابرد هر دو آزمون پوشش غیرشرطی و استقلال نیز از ارجحیت برخوردار است، چراکه با ادغام هر دو آزمون، سطح خطای آماری را کاهش می‌دهد.

مثال (۱۱-۳): آزمون پوشش شرطی

این مثال بر اساس داده‌های مثال (۱۱-۲) می‌باشد. نسبت احتمال پوشش شرطی برای این داده‌ها به‌ترتیب زیر می‌باشد.

$$LR_{ind} = 2\ln\left[\frac{(1-0.0021)^{469}\,0.0021(1-09667)0.9667^{29}}{(1-0.05)^{470}\,(0.05)^{30}}\right] = 204.88$$

از آن‌جا که ارزش بحرانی توزیع کای‌دو در سطح خطای ۵٪ و با ۲ درجهٔ آزادی برابر ۵/۹۹۱۵ است، فرضیهٔ صفر رد می‌شود. یعنی ماتریس گذار مشاهدات به لحاظ آماری تفاوت قابل‌ملاحظه‌ای با ماتریس گذار موردانتظار پوشش شرطی دارد. به‌عبارتی دیگر، مدل یادشده از آزمون پوشش شرطی سربلند بیرون نیامده است.

آزمون اختلاف شرطبندی[1]

آزمون اختلاف شرطبندی توسط برکویتز و همکارانش پیشنهاد شد.[2] وی در جستجوی طراحی روشی یکپارچه برای ارزیابی مدل‌های ارزش درمعرض‌ریسک بود. بینش اساسی او در این آزمون این است که فرضیات پوشش غیرشرطی و استقلال، چیزی غیر از پیامدهای فرضیهٔ اختلاف شرطبندی برای فرآیند $I_{t+1}(\alpha)-(\alpha)$ نیست. بنابراین فرضیهٔ پوشش شرطی یک سری از تخطی‌ها را می‌توان بر اساس بررسی رفتار شرطبندی[3] سری

1. martingale difference
2. Berkowitz et al, (2005).
3. martingale behavior

$\{I_{(t+1)}(\alpha)\}_0^T$ آزمود. فرضیهٔ شرطبندی سابقهٔ بلندمدت و قابل‌ملاحظه‌ای در نظریه‌های اقتصادی و مالی دارد و تعداد زیادی روش برای ارزیابی و آزمون آن توسعه یافته است.

برکویتز آزمون خود را بر این اساس قرار داد که مشاهدات حاصل از کم‌کردن میانگین از تابع معرف $(I_{t+1}(\alpha)-(\alpha))$ تشکیل یک توالی اختلاف شرطبندی می‌دهد. طبق تعریف داریم:

$$E\left[I_{t+1}(\alpha)-(\alpha)\middle|\Omega_t\right]=0 \quad (۳۵-۱۱)$$

که Ω_t مجموعهٔ اطلاعات تا زمان t است. اگر فرضیهٔ اختلاف شرطبندی برای حاصل اختلاف سری تخطی‌ها از میانگین درست باشد، توالی تخطی‌های ارزش درمعرض‌ریسک نسبت به تمامی متغیرهای پیرو و پیشرو[1] ناهمبسته خواهد بود. بررسی ویژگی شرطبندی از طریق آزمون پورتمانتو[2] صورت می‌گیرد که به باکس-جانک-پیرس[3] هم معروف است. این آزمون از طریق محاسبهٔ خودهمبستگی‌های نمونه، به اجرا درمی‌آید. فرضیهٔ صفر خودهمبستگی‌ها را می‌توان به این صورت نوشت:

$$E\left[(I_{t-1}(\alpha)-\alpha)(I_{t-k}(\alpha)-\alpha)\right]=0 \qquad \forall k\geq 0 \quad (۳۶-۱۱)$$

که تعمیمی از ویژگی تشریح‌شده در آزمون نسبت احتمال پوشش شرطی است. برکویتز فرضیهٔ صفر را به‌صورت زیر خلاصه می‌کند:

$$\left(I_{t+1}(\alpha)-\alpha\right)\overset{iid}{\sim} N\left(0,\alpha(1-\alpha)\right) \quad (۳۷-۱۱)$$

معنی عبارت فوق این است که اختلاف توالی تخطی‌ها از میانگین، نوفهٔ سفید[4] می‌باشد. در حالت استاندارد، فرضیهٔ صفر فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\begin{cases} H_0:\gamma_k=0 & k>0 \\ H_1:\gamma_k\neq 0 & for\, some\ k>0 \end{cases} \quad (۳۸-۱۱)$$

---

1. lags and leads variables
2. Portmanteau test
3. Box-Pierce-Ljung
4. white noise

که γ_k، خودهمبستگی با تأخیر «k»ام در توالی تخطی‌هاست. آمارهٔ آزمون پورتمانتو یا باکس-جانگ-پیرس از طریق m تعداد از اولین خودهمبستگی‌های توالی $I_{t+1}(\alpha)-(\alpha)$ طبق معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$Q_m = T(T+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\gamma_k^2}{T-K} \quad (۱۱-۳۹)$$
$$If\ T \to \infty \Rightarrow L \sim \chi^2\,(m)$$

این نسبت مجانباً دارای توزیع کای‌دو با درجهٔ آزادی m است.

آزمون انگل و منگانلی

انگل و منگانلی جهت آزمون فرضیهٔ کارایی شرطی[1]، یک مدل رگرسیون خطی را پیشنهاد می‌کنند که تخطی‌های کنونی را به تخطی‌های گذشته مربوط می‌سازد.[2] برای انجام این آزمون متغیر Hit به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Hit_t(\alpha) = I_t(\alpha) - \alpha \quad and$$
$$Hit_t(\alpha) = \begin{cases} 1-\alpha & If\ \ r_t < -\%VaR_{t|t-1}(\alpha) \\ -\alpha & else \end{cases} \quad (۱۱-۴۰)$$

حالا مدل رگرسیون خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$Hit_t(\alpha) = \delta + \sum_{k=1}^{K}\beta_k Hit_{t-k}(\alpha) + \sum_{k=1}^{K}\gamma_k\ g\,[Hit_{t-k}(\alpha), Hit_{t-k-1}(\alpha), ...,\ z_{t-k}, z_{t-k-1}, ...] + \varepsilon_t$$

(۱۱-۴۱)

که ε_t متغیر اخلال بوده و جملات آن به‌صورت یکسان و مستقل از هم توزیع شده‌اند. $g\,(.)$ تابعی از تخطی‌های گذشته و نیز تابعی از متغیرهای z_{t-k} (که از مجموعهٔ

---

1. conditional efficiency
2. Engle and Manganelli (2004).

اطلاعات تا زمان $t-1$ یعنی Ω_{t-1} حاصل می‌شود) است. به‌عنوان مثال، می‌توانیم بازده‌های گذشته (r_{t-k})، مجذور بازده‌های گذشته (r_{t-k}^2)، مقادیر پیش‌بینی‌شدهٔ ارزش درمعرض‌ریسک گذشته ($VaR_{t-k|t-k-1}(\alpha)$) و یا داده‌های تلاطم ضمنی را به‌عنوان متغیرهای این تابع در نظر بگیریم. به هر حال آزمون فرضیهٔ صفر کارایی شرطی مستلزم بررسی پوچ‌بودن توأمان[1] β_k و γ_k و عدد ثابت δ است. بر این اساس، فرضیهٔ صفر را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$H_0 : \delta = \beta_k = \gamma_k = 0 \quad (۴۲-۱۱)$$

به‌راحتی می‌توان از یک آمارهٔ نسبت احتمال یا آمارهٔ والد[2] برای آزمون پوچ بودن توأمان این ضرایب استفاده کرد. اگر بردار پارامترها را با $\mathbf{\Psi} = (\delta\ \beta_1 ... \beta_k\ \gamma_1 ... \gamma_k)'$ و ماتریس متغیرهای توضیحی[3] رابطهٔ فوق را با $\mathbf{Z}$ نشان دهیم، آمارهٔ والد برای آزمون فرضیهٔ کارایی شرطی (DQ_{cc}) با نسبت احتمال زیر بیان می‌شود:

$$DQ_{cc} = \frac{\hat{\mathbf{\Psi}}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\hat{\mathbf{\Psi}}}{\alpha(1-\alpha)} \quad (۴۳-۱۱)$$
$$If\ T \to \infty \Rightarrow L \sim \chi^2\,(2K+1)$$

این نسبت در صورتی‌که تعداد کل پیش‌بینی‌ها به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، دارای توزیع کای‌دو با درجهٔ آزادی $2K+1$ است که برابر با تعداد پارامترهای مدل می‌باشد. آزمون انگل و منگانلی به آزمون صدک پویا[4] نیز معروف است.

رویکرد پیش‌بینی چگالی

آزمون‌هایی که در بخش قبلی معرفی کردیم، کارایی غیرشرطی و شرطی سنجهٔ ریسک را برای یک سطح پوشش معین مورد بررسی قرار می‌دهد. اما، این آزمون‌ها برای

1. joint nullity
2. Wald statistic
3. explanatory variables
4. dynamic quantile test (DQ test)

ارزیابی عمومی مدل کفایت نمی‌کند. به‌عنوان مثال، اگر یک مدل VaR در سطح پوشش ۱٪ تخطی‌های مستقلی ارایه دهد، اما در سطح پوشش ۵٪ به تشکیل خوشه‌های تخطی منجر گردد، به‌عنوان یک مدل معتبر عمومی شناخته نمی‌شود. این استدلال ما را بر آن می‌دارد که در آزمون‌های خود محدودیت‌های بیشتری اعمال کنیم. برای این منظور، کارایی شرطی را برای تمامی نرخ‌های پوشش موجود در بازهٔ صفر تا یک می‌آزماییم. رویکرد پیش‌بینی چگالی شامل آزمون‌های مبتنی بر تبدیل روزن‌بلات و آزمون‌های مبتنی بر تبدیل برکویتز است.

آزمون‌های مبتنی بر تبدیل روزن‌بلات[1]

برای اجرای این آزمون ابتدا داده‌ها را بر اساس روش روزن‌بلات تبدیل می‌کنیم. فرض کنید r_t بازدهٔ مشاهده‌شدهٔ دارایی یا سبد دارایی در زمان t و $F_t(.)$ تابع توزیع تجمعی موردانتظار برای دورهٔ t باشد. توجه داشته باشید که این تابع مقدار $\%VaR_t$ را در سطح اطمینان $1-\alpha$ بر اساس رابطهٔ زیر تعیین می‌کند:

$$\%VaR_t = -F_t^{-1}(\alpha) \quad (۴۴-۱۱)$$

بر اساس روش روزن‌بلات، بازدهٔ هر دوره را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$p_t = F_t(r_t) \qquad (۴۵-۱۱)$$

که p_t احتمال تجمعی رخداد بازدهٔ مشاهده‌شدهٔ r_t بر اساس تابع توزیع تجمعی موردانتظار $F_t(.)$ است. این تبدیل داده‌ها به تبدیل انتگرال احتمال[2] نیز معروف است. به‌عنوان مثال، اگر مدل ریسک ما بر اساس توزیع نرمال با میانگین ۵٪ و واریانس ۱٪ باشد، احتمال تجمعی بازدهٔ ۰/۱۵ درصد، برابر ۳۱٪ است. این تبدیل واحد، داده‌ها را بر اساس یک معیار یعنی توابع توزیع تجمعی موردانتظار، استاندارد می‌کند و این استانداردسازی قابلیت مقایسهٔ داده‌ها را فراهم می‌آورد.

---

1. tests based on Rosenblatt transformation
2. probability integral transformation

در جدول زیر، تعدادی بازده و مقادیر مبدل آن‌ها ارایه شده است. فرض کنید که r_t دارای توزیع نرمال است. ستون اول این جدول به تاریخ مشاهدات و پارامترهای پیش‌بینی‌شده مربوط می‌شود. ستون دوم شامل بازده‌های واقعی و دو ستون بعدی شامل پیش‌بینی‌های میانگین و انحراف‌معیار بازده است که در واقع پارامترهای تخمینی مدل می‌باشند. در نهایت، ستون پنجم شامل مقادیر تابع توزیع تجمعی بازده‌های واقعی است که بر اساس پارامترهای تخمینی مربوطه به‌دست آمده است. این مقادیر در واقع همان داده‌ای مبدل روزن‌بلات می‌باشد.

تاریخ مشاهدات	بازدهٔ واقعی	میانگین پیش‌بینی‌شده	انحراف‌معیار پیش‌بینی‌شده	مقدار تابع توزیع تجمعی نرمال
۱	۱۲٪/۶۰۹	۰/۱	۰/۲	۵۵٪/۲
۲	۱۵٪/۰۴۱	۰/۰۹	۰/۲۱	۶۱٪/۳
۳	−۱۴٪/۲۲۲	۰/۱۱	۰/۲۲	۱۲٪/۶
۴	۳۶٪/۳۹۱	۰/۰۹	۰/۲۳	۸۸٪/۳
۵	۹٪/۱۷۲	۰/۱	۰/۲۲	۴۸٪/۵

جدول (۱۱–۱): مثالی از تبدیل روزن‌بلات

به‌عنوان مثال، اولین مشاهده شامل بازدهٔ واقعی ۱۲/۶۰۹٪ است که میانگین و انحراف‌معیار پیش‌بینی‌شدهٔ آن به‌ترتیب ۰/۱ و ۰/۲ است و احتمال تجمعی این بازده ۵۵/۲٪ است. اگر مدل پیش‌بینی ما بر اساس فرض توزیع نرمال نباشد، می‌توانیم تابع توزیع تجمعی نرمال را با تابعی که متناسب مدل ماست جایگزین کنیم. به‌عنوان مثال می‌توانیم از تابع توزیع تجمعی t و یا در صورت ناپارامتریک‌بودن مدل، از توابع توزیع تجمعی تجربی استفاده نماییم.

استفاده از تبدیل روزن‌بلات کاربرد آزمون‌های برابری توزیع[1] را جهت ارزیابی دقت مدل ریسک ممکن می‌سازد. به‌طور خاص می‌توان گفت که تحت فرضیهٔ صفر، انتظار

1. distribution-equality tests

داریم که ۱۰٪ از پایین‌ترین مشاهدات در ناحیه‌ای بین صفر تا ۰/۱ قرار گیرد و ۱۰٪ بعدی بین ۰/۱ و ۰/۲ قرار گیرد و به همین ترتیب ادامه پیدا کند. بنابراین تحت فرضیهٔ صفر که از آن دقت مدل استنباط می‌شود، انتظار داریم که داده‌های مبدل روزن‌بلات دارای توزیع یکنواخت استاندارد[1] باشد:

$$p_t = F_t(r_t) \sim i.i.d.\ U(0,1) \quad (۴۶\text{-}۱۱)$$

بنابراین آزمون اعتبار مدل VaR مستلزم آزمون فرضیهٔ فوق است. برکویتز در نوشته‌های خود اذعان می‌نماید:

> بدین ترتیب اگر بانک‌ها ملزم شوند که به‌طور مرتب توزیع‌های پیش‌بینی‌شده یعنی $\hat{F}(.)$ را ارایه دهند، ناظران می‌توانند از تبدیل انتگرالِ احتمال استفاده کنند و سپس از آن در جهت آزمون استقلال تخطی‌ها و یا یکنواختی بهره گیرند. این نتیجه صرف‌نظر از توزیع زیربنایی بازدهٔ سبد دارایی (r_t) و یا حتی تغییرپذیری مدل پیش‌بینی در طی زمان، حاصل می‌شود.[2]

بر اساس این اصل عمومی، روش‌های مختلفی را می‌توان جهت آزمون استقلال و یا یکنواختی به‌کار گرفت. کرنکویک و دراچمن استفاده از آماره‌های کوییر[3] را جهت آزمون یکنواختی پیشنهاد می‌کنند.[4] دیبولد، گانزر و تای جهت آزمون اهمیت فاصلهٔ میان سری مبدل و توزیع نظری $U(0,1)$، استفاده از آزمون‌های ناپارامتریک مانند کولموگروف–اسمرینوف[5] و کرامر–ون– میسِز[6] را پیشنهاد می‌کنند.[7] مشکل اصلی این آزمون‌های ناپارامتریک این است که جهت دستیابی به یک سطح منطقی از دقت، نیازمند مشاهدات زیادی است.

1. standard uniform distribution
2. Berkowitz (2001), p. 7.
3. Kuiper statistics
4. Crnkovic and Drachman (1997).
5. Kolmogorov-Smirnov
6. Cramer-Von-Mises
7. Diebold, Gunther and Tay (1998).

توجه داشته‌باشید که اگر به‌جای مطالعه برروی توزیع کامل بازده به بازده‌های دنبالهٔ توزیع علاقه‌مند باشیم، باز هم می‌توانیم از فرضیهٔ صفر یادشده استفاده کنیم. تصور کنید که تمامی بازده‌های واقعی را بر اساس روش روزن‌بلات تبدیل نموده‌ایم. بر اساس فرضیهٔ صفر، پیش‌بینی می‌شود که این بازده‌های مبدل دارای توزیع یکنواخت در فاصله صفر و یک باشند. حال تمامی مشاهدات (غیر از آن‌هایی که مربوط به زیان‌هایی فراتر از VaR است) را حذف می‌کنیم. اگر مدل ریسک ما مدل دقیقی باشد، مقادیر مبدل باقیمانده باید در فاصلهٔ $(0,\alpha)$ به توزیع یکنواخت نزدیک باشد. بدین‌ترتیب می‌توان مقادیر مبدل مشاهدات دنباله را به‌گونه‌ای به‌دست آورد که توزیع دنبالهٔ حاصل، تحت فرضیهٔ صفر در فاصله $(0,1)$ دارای توزیع یکنواخت باشد. برای این کار کافی است که مقادیر مبدل را به حد بالای دنباله یعنی α تقسیم کنیم. به‌عنوان مثال تصور کنید که $1-\alpha=\%95$ و اولین تخطی دارای بازدهٔ ۲۸٪- است. فرض کنید که تابع احتمال موردانتظار، تابعی نرمال با میانگین ۰/۱ و انحراف‌معیار ۰/۲ می‌باشد. بنابراین این بازده دارای احتمال تجمعی ۲٪/۸۷ می‌باشد. بدیهی است که مقدار ۲/۸۷٪ در توزیع بازدهٔ اولیه، برابر با ۵۷/۴٪ در توزیع دنبالهٔ بازده می‌باشد. به‌طور خلاصه، می‌توان بر روی توزیع کامل بازده و یا توزیع دنبالهٔ بازده کار کرد و در هر دو صورت می‌توان نتیجه گرفت که تحت فرضیهٔ صفر، سری مبدل روزن‌بلات دارای توزیع استاندارد یکنواخت است. در نهایت می‌توان این فرضیه را بر اساس روش‌های یادشده آزمون نمود.

آزمون‌های مبتنی بر تبدیل برکویتز[1]

به‌دلیل مشکلاتی که خصوصاً در مسیر آماره‌های ناپارامتریک وجود دارد، برکویتز آزمون پارامتریکی را پیشنهاد نمود که بر اساس تبدیل مجدد متغیر p_t قرار دارد. در این‌جا به‌جای این‌که آزمون یکنواختی توزیع داده‌های مبدل را در نظر بگیریم، متغیر p_t را به‌گونه‌ای تبدیل می‌کنیم که تحت فرضیهٔ صفر دارای توزیع نرمال‌استاندارد باشد. برای انجام این کار از تبدیل معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال استفاده می‌کنیم. با توجه به این‌که p_t در بازهٔ صفر و یک دارای توزیع یکنواخت است، به این نتیجه می‌رسیم که

---

1. tests based on Berkowitz transformation

متغیر z_t دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک و یا به‌عبارتی دارای توزیع نرمال‌استاندارد است:

$$z_t = \Phi^{-1}(p_t) = \Phi^{-1}\left[(F_t(r_t)\right] \sim i.i.d.\ \ N(0,1) \quad (۴۷-۱۱)$$

که $\Phi^{-1}(.)$ معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال‌استاندارد است.

تبدیل برکویتز، سری یکنواخت را به سری نرمال‌استاندارد تبدیل می‌کند و در نتیجه ارزیابی دقت مدل را از طریق آزمون‌های نرمال‌بودن[1]، ممکن می‌سازد. یکی از جذابیت‌های داده‌های مبدل برکویتز نسبت به داده‌های یکنواخت این است که می‌توان مستقیماً ابزارهای آماری قدرت‌مندتری را به‌کار گرفت. در واقع با این تبدیل این امکان فراهم می‌شود که با استفاده از مجموعه‌ای از آزمون‌های قدرت‌مند، منابع نقصان مدل را با وضوح بیشتری درک کرد. هم‌چنین این تبدیل، ما را در جهت آزمون استقلال پیش‌بینی‌ها توانمندتر می‌سازد.

برکویتز پیشنهاد کرد که این آزمون را به آزمون فرضیه‌ای محدود کنیم که z_t در آن دارای میانگین صفر و واریانس یک است. این امکان برایمان وجود دارد که نرمال‌بودن z_t را نیز آزمون کنیم. اما، آزمون نرمال‌بودن در صورت کم‌بودن تعداد مشاهدات، قدرت‌مند نخواهد بود. به‌هرحال اگر ویژگی نرمال‌بودن را آزمون نکنیم، اطلاعات زیادی از دست نخواهیم داد.

راه ساده و قدرت‌مند آزمون هم‌زمان دو فرضیهٔ میانگین صفر و واریانس یک، آزمون نسبت احتمال است. به‌وسیلهٔ آزمون نسبت احتمال آزمون می‌کنیم که آیا تحمیل محدودیت (در این‌جا z_t دارای میانگین صفر و واریانس یک) به نقصان قابل‌ملاحظه‌ای در احتمال منجر می‌شود. آمارهٔ آزمون بر اساس تابع احتمال سری مبدل z_t است. از آن‌جا که z_t تحت فرضیهٔ صفر (که طبق آن مدل صحیح است)، دارای توزیع نرمال می‌باشد، تابع احتمال را از طریق چگالی نرمال به‌دست می‌آوریم:

$$L = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp-\left(\frac{(z_t - \mu_t)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (۴۸-۱۱)$$

---

1. normality tests

یعنی اگر T مشاهده داشته باشیم، احتمالات مشاهدات انفرادی z_t را جهت دستیابی به احتمال مشاهدهٔ این مجموعهٔ T مشاهده‌ای، در هم ضرب کنیم. کارکردن با لگاریتم احتمال آسان‌تر است. بنابراین می‌توانیم رابطهٔ (۱۱–۴۸) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\ln L = -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{T}{2}\ln\sigma^2 - \sum_{t=1}^{T}\frac{(z_t-\mu)^2}{2\sigma^2} \quad (۱۱–۴۹)$$

جهت ارزیابی لگاریتم احتمال از برآوردکننده‌های حداکثر درست‌نمایی برای میانگین و واریانس متغیر مبدل z_t استفاده می‌کنیم:

$$\hat{\mu}_{ML} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t \quad (۱۱–۵۰)$$

$$\hat{\sigma}_{ML}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(z_t-\hat{\mu}_{ML})^2 \quad (۱۱–۵۱)$$

نسبت احتمال جهت آزمون توأم دو فرضیه ($\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$) به‌صورت زیر است:

$$LR = 2\left(\ln L(\mu=\hat{\mu}_{ML}, \sigma^2=\hat{\sigma}^2_{ML}) - \ln L(\mu=0, \sigma^2=1)\right) \quad (۱۱–۵۲)$$

اگر تحمیل فرضیات $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ منجر به کاهش احتمال شود، LR بزرگ خواهد شد و در این‌صورت شواهد کافی مبنی بر این است که z_t دارای میانگین صفر و واریانس یک نیست. LR مجانباً دارای توزیع کای‌دو با دو درجهٔ آزادی است.

رویکرد مقایسه‌ای

از طریق رویکردهایی که در بخش‌های قبلی تشریح شد، دقت مدل‌های VaR به لحاظ آماری مورد آزمون قرار می‌گیرد. اگر دقت یک مدل به‌لحاظ آماری رد نشود، مدلی قابل‌قبول خواهد بود. اما، در بسیاری از موارد چندین مدل در اختیار داریم و پس‌آزمایی‌ها دقت برخی از آن‌ها را مورد تأیید قرار می‌دهد. بدیهی است که در این هنگام انتخاب از میان مدل‌های تأییدشده به‌عنوان مسأله‌ای پیش روی مدیریت ریسک قرار می‌گیرد. این مسأله ما را به‌سوی روش‌هایی راهنمایی می‌کند که هدفشان مقایسه مدل‌های مختلف

ریسک است. این روش‌ها بر اساس یک تابع زیـان[1]، نمره‌هـایی را بـه هرکـدام از مـدل‌ها اختصاص می‌دهد و بر اساس این نمرات، رتبه‌بندی[2] مدل‌ها امکان‌پذیر می‌شود. هرچه نمرهٔ یک مدل کمتر باشد، مدل بهتری خواهد بود و در سطوح بالاتر رتبه‌بنـدی جـای می‌گیـرد. این رویکردها جهت آزمون آماری کفایت مدل توسعه نیافتـه اسـت و در عـوض هـدف آن رتبه‌بندی مدل‌هاست. در واقع این رویکردها شامل آزمون‌های آمـاری نیسـت و در نتیجـه فاقد نقطه ضعف‌های چنین آزمون‌هایی است. ایـن ویژگـی موجـب جـذابیت رویکردهـای مقایسه‌ای شده است، چراکه با مجموعـه‌های کـوچکی از داده‌هـا قابل‌اجراسـت. بـه‌علاوه رویکردهای مقایسه‌ای این امکان را فراهم می‌آورد که جهت احتساب موارد خـاص، توابـع زیان مربوطه را ایجاد نماییم. بـه‌عنوان مثـال ممکـن اسـت زیان‌هـای بـزرگ نسـبت بـه زیان‌های کوچک اهمیت بیشتری داشته باشد و بر این اساس می‌توان به زیان‌های بزرگ‌تر وزن بیشتری در تابع زیان اختصاص داد.

فرآیند رتبه‌بندی چهار جزء کلیدی و یک خروجی دارد، که در واقع رتبهٔ نهایی هر مدل است.

جزء اول، مجموعه‌ای از n زوج مشاهده است. هرکدام از این زوج‌ها شامل زیـان هـر دوره و ارزش درمعرض‌ریسک پیش‌بینی‌شدهٔ همان دوره است.

جزء دوم، یک تابع زیـان اسـت کـه بسـته بـه چگـونگی مقایسـهٔ بـین زیـان (سـود) مشاهده‌شده با ارزش درمعرض‌ریسک پیش‌بینی‌شده، نمره‌ای را به هر مشـاهده اختصـاص می‌دهد. بنابراین اگـر L_t زیـان مشاهده‌شـده در دورهٔ t و VaR_t ارزش درمعرض‌ریسـک پیش‌بینی‌شده برای همان دوره باشد، تابع زیان، ارزش زیر را به مشاهدهٔ دورهٔ t اختصـاص می‌دهد:

$$C_t = \begin{cases} f(L_t, VaR_t) & if \quad L_t > VaR_t \\ g(L_t, VaR_t) & if \quad L_t \le VaR_t \end{cases} \quad (۵۳-۱۱)$$

در این رابطه، شرط $f(L_t, VaR_t) \ge g(L_t, VaR_t)$ همواره برقرار است. بدین معنی که زیان‌های دنباله هرگز ارزشی پایین‌تر از دیگر مشاهدات نمی‌گیرد.

---

1. loss function
2. ranking

جزء سوم، یک معیار مقایسه[1] است که بیانگر نمرهٔ موردانتظار ما از یک مدل مطلوب می‌باشد. معیار مقایسه را با p نشان می‌دهیم.

جزء چهارم، یک تابع نمره[2] است که تابع زیان و معیار مقایسه به‌عنوان ورودی آن می‌باشد. اگر فرض کنیم که در مدل ایده‌آل، معیار مقایسه مساوی ارزش موردانتظار تابع زیان باشد، لوپز پیشنهاد می‌کند که از یک تابع نمرهٔ احتمال درجهٔ دوم[3] به‌عنوان تابع نمره استفاده کنیم:[4]

$$QPS = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(C_t - p)^2 \quad (۵۴-۱۱)$$

خروجی این تابع در بازهٔ $[0,2]$ است و هرچه مقدار QPS به صفر نزدیک‌تر باشد مدل ریسک نمرهٔ بهتری خواهد داشت. بدین ترتیب می‌توانیم از QPS (یا دیگر توابع نمره) برای رتبه‌بندی مدل‌ها استفاده کنیم.

برای اجرای فرآیند رتبه‌بندی مدل‌ها باید تابع زیان را مشخص کنیم و این در حالی است که شماری از توابع زیان مختلف پیشنهاد شده‌اند. شاید ساده‌ترین تابع، تابع زیان دوتایی[5] باشد که از جانب لوپز پیشنهاد گردید. در صورتی که مشاهدهٔ ما در دنبالهٔ زیان واقع گردد این تابع مقدار یک و در غیر این‌صورت مقدار صفر به خود می‌گیرد. رابطهٔ این تابع عبارت است از:

$$C_t = \begin{cases} 1 & if \quad L_t > VaR_t \\ 0 & if \quad L_t \le VaR_t \end{cases} \quad (۵۵-۱۱)$$

این تابع به اولین تابع زیان لوپز[6] معروف است و برای کاربرانی مناسب است که به فراوانی زیان‌های دنباله علاقه‌مندند. معیار مقایسهٔ این تابع p است که برابر با ارزش موردانتظار C_t یعنی $E(C_t)$ می‌باشد.

---

1. benchmark
2. score function
3. quadratic probability score (QPS) function
4. Lopez (1998).
5. binary loss function
6. Lopez I loss function

مثال (۱۱-۴): اولین پس‌آزمایی لوپز[1]

فرض کنید که بر اساس یک مدل ارزش درمعرض‌ریسک در سطح اطمینان ۹۵٪ تعداد ۵۰۰ پیش‌بینی از ارزش درمعرض‌ریسک هر دوره در اختیار داریم. اگر در این ۵۰۰ پیش‌بینی تعداد ۳۰ تخطی وجود داشته باشد، با کاربرد اولین پس‌آزمایی لوپز، رتبه این مدل برابر است با:

$$QPS = \frac{2}{500} \times \left(30 \times (1-0.05)^2 + 470 \times (0-0.05)^2\right) = 0.1130$$

بر اساس این تابع، بهترین مدل ریسک مدلی است که تعداد تخطی‌های آن برابر با تعداد تخطی‌های موردانتظار باشد. تعداد تخطی‌های موردانتظار برابر است:

$$x = np = 500 \times 0.05 = 25$$

اکنون مقدار QPS را بر اساس تعداد تخطی‌های موردانتظار محاسبه می‌کنیم:

$$QPS = \frac{2}{500} \times \left(25 \times (1-0.05)^2 + 475 \times (0-0.05)^2\right) = 0.095$$

بنابراین، اولین پس‌آزمایی لوپز می‌گوید که مدل ما عملکردی پایین‌تر از مدلی دارد که تعداد تخطی‌های آن برابر تخطی‌های موردانتظار است. بر اساس این مثال، هر مدلی که نمرهٔ آن به ۰/۰۹۵ نزدیک‌تر باشد، عملکرد بهتری خواهد داشت. به هر حال این تابع در مورد این‌که آیا اختلاف بین مدل ما و مدل موردانتظار به‌لحاظ آماری قابل‌ملاحظه است یا خیر، چیزی نمی‌گوید.

بر اساس این روش، مدلی که تخطی ایجاد نکند، بالاترین رتبه را به‌خود اختصاص می‌دهد درحالی‌که این نتیجه گمراه‌کننده است. بنابراین برای رتبه‌بندی مدل‌ها باید از نمرهٔ (QPS) مدلی استفاده کنیم که تعداد تخطی‌های آن برابر تخطی‌های موردانتظار است. دوری و نزدیکی نمرهٔ دیگر مدل‌ها نسبت به نمرهٔ این مدل مبنای اعطای رتبه‌های پایین‌تر و بالاتر است. ایراد دیگر اولین پس‌آزمایی لوپز این است که از اندازهٔ زیان‌های دنباله صرف‌نظر می‌کند و تنها تعداد آن‌ها را مورد ملاحظه قرار می‌دهد. لوپز برای بهبود این

1. Lopez I backtest

مدل، تابع زیان دیگری را پیشنهاد می‌کند که به دومین تابع زیان لوپز[۱] معروف است. ایـن تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_t = \begin{cases} 1+(L_t - VaR_t)^2 & if \quad L_t > VaR_t \\ 0 & if \quad L_t \le VaR_t \end{cases} \quad (۵۶-۱۱)$$

این رابطه امکان احتساب اندازهٔ زیان‌های موجود در دنباله را فـراهم می‌کنـد. بـدین ترتیب، این تابع زیان به مدلی که زیان‌های دنبالهٔ آن بالاتر باشد، مقدار بیشـتری می‌دهـد. توجه داشته باشید که بر اساس این رابطه دیگر نمی‌توان معیار مقایسه را به سـادگی روش قبل برآورد نمود. بنابراین، برای تخمین معیار مقایسه باید از دیگر ابزارها مانند شبیه‌سـازی مونت‌کارلو استفاده کرد. به‌علاوه این تابع زیان تعدیل‌شده به‌گونه‌ای است که درک شهودی ما را دچار ابهام می‌سازد، چراکه هیچ تعبیر اقتصادی خاصی برای مجذور زیان‌های فراتر از VaR وجود ندارد.

برای رفع این مشکل بلانکو و ایهل تابع زیان زیر را پیشنهاد کردند:[۲]

$$C_t = \begin{cases} (L_t - VaR_t)/VaR_t & if \quad L_t > VaR_t \\ 0 & if \quad L_t \le VaR_t \end{cases} \quad (۵۷-۱۱)$$

این تابع زیان به هر مشاهدهٔ موجود در دنباله، وزنی برابر با زیـان دنبالـه[۳] تقسـیم بـر VaR اختصاص می‌دهد. درک شهودی این تابع آسان است و ما را مطمـئن می‌سـازد کـه تابع زیان یعنی C_t، به زیان‌های بزرگ‌تر دنباله، مقادیر بزرگ‌تری می‌دهد. استخراج معیـار مقایسهٔ این رویهٔ ارزیابی، آسان است و معادل اختلاف بین ES و VaR تقسـیم بـر VaR می‌باشد:

$$p_t = \frac{ES_t - VaR_t}{VaR_t} \quad (۵۸-۱۱)$$

1. Lopez II loss function
2. Blanco and Ihle (1998).
3. tail-loss

تابع زیان بلانکو و ایهل نیز دارای مشکلی است. اگر مخرج رابطه یعنی VaR، صفر باشد، رابطه تعریف‌نشده می‌گردد و اگر مقدار VaR، منفی و یا به صفر نزدیک شود، پاسخ‌های گمراه‌کننده‌ای ایجاد می‌نماید. بنابراین تنها درصورتی می‌توان به آن اتکا کرد که مطمئن باشیم VaR مثبت و به اندازهٔ کافی بزرگ است.

بنابراین باید به‌دنبال تابع زیانی باشیم که اولاً مبتنی بر اندازهٔ زیان باشد و ثانیاً مشکلات دومین تابع لوپز و تابع بلانکو و ایهل را نیز نداشته باشد. یک گزینهٔ مناسب، تعریف تابع زیان بر اساس زیان دنباله است:

$$C_t = \begin{cases} L_t & if \quad L_t > VaR_t \\ 0 & if \quad L_t \le VaR_t \end{cases} \quad (۵۹-۱۱)$$

بدیهی است که ارزش موردانتظار دنباله برابر با ES است. بنابراین می‌توانیم ES را به‌عنوان معیار مقایسه در نظر بگیریم و از یک تابع نمرهٔ درجهٔ دو به‌قرار زیر استفاده کنیم:

$$QS = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(C_t - ES_t)^2 \quad (۶۰-۱۱)$$

این تابع، انحرافات زیان‌های دنباله از مقادیر موردانتظارشان را مشمول جریمه می‌نماید که با درک شهودی ما نیز هم‌خوانی دارد. اما، از آن‌جا که یک تابع درجهٔ دو است، به زیان‌های بسیار بزرگ دنباله نسبت به زیان‌های عادی‌تر دنباله، اوزان بسیار بزرگ‌تری را اختصاص می‌دهد و بدین ترتیب در مورد زیان‌های بزرگ، سخت‌گیری بیش از حد روا می‌دارد.

پس‌آزمایی با موقعیت‌ها و داده‌های جایگزین

برای حصول اطمینان بیشتر از کفایت مدل‌های ریسک می‌توان با جایگزینی داده‌های فعلی با دیگر داده‌ها به پس‌آزمایی مدل‌ها اقدام نمود. این داده‌های جایگزین می‌تواند شامل موقعیت‌هایی متفاوت از موقعیت‌های کنونی سبد و یا داده‌هایی متفاوت از داده‌های کنونی باشد. بدین‌ترتیب امکان پس‌آزمایی مجدد مدل‌های ریسک فراهم می‌شود.

پس‌آزمایی با موقعیت‌های جایگزین

برخی از این موقعیت‌ها شامل موارد زیر است:

- سبدهای تاریخی: سبدهایی که طی مدت زمان مشخصی در گذشته داشته‌ایم.
- موقعیت‌های گوناگون در سطح واحد تجاری و یا کل مؤسسه: می‌توان موقعیت‌های مؤسسه در سهام را جدا از موقعیت‌های با درآمد ثابت و نیز دیگر موقعیت‌ها مورد پس‌آزمایی قرار داد. همچنین می‌توانیم مدل‌های ریسک را در هر سطحی از واحد تجاری، مانند معامله‌گران، مدیران دارایی و یا ابزارهای مالی پس‌آزمایی کنیم.
- موقعیت‌های معیار: مجموعه‌ای از موقعیت‌های مهم را به‌عنوان نمونه در نظر می‌گیریم و به پس‌آزمایی مدل خود بر اساس این موقعیت‌های انتخابی اقدام می‌نماییم. این موقعیت‌ها می‌تواند شامل یک موقعیت نوعی در بازار سهام، یک موقعیت نوعی در بازار اختیارمعامله و غیره باشد. پس‌آزمایی بر اساس این موقعیت‌های معیار برای اهداف مقایسه‌ای بسیار مفید است.
- به‌عنوان گزینه‌ای دیگر می‌توانیم به‌صورت تصادفی تعداد زیادی سبد دارایی انتخاب کرده و هرکدام را مورد پس‌آزمایی قرار هیم. در ادامه، میانگین نتایج را استخراج می‌کنیم. تمرکز بر میانگین نتایج ما را از نتایج مربوط به برخی سبدهای خاص در امان می‌دارد.

پس‌آزمایی با داده‌های جایگزین

برخی از این داده‌ها شامل موارد زیر است:

- می‌توانیم دورهٔ زمانی تاریخی مورد استفاده برای پس‌آزمایی را تغییر دهیم تا نتایج حاصل از پس‌آزمایی مدل‌های ریسک تنها مبتنی بر یک دورهٔ زمانی خاص نباشد.
- می‌توانیم برای هر دورهٔ زمانی خاص، عملیات بوت‌استرپ را بر روی داده‌ها پیاده کنیم و از داده‌های جدید برای پس‌آزمایی استفاده نماییم. بدین ترتیب مجموعه بزرگ‌تری از داده‌ها در اختیار خواهد بود.

- می‌توانیم از شبیه‌سازی مونت‌کارلو یا دیگر روش‌های شبیه‌سازی استفاده کنیم و بر اساس پارامترهای موجود در بازار و یا نظرات خود به تولید داده‌های جدید اقدام نماییم.

نتیجه‌گیری

قبل از این‌که از سنجهٔ ارزش درمعرض‌ریسک به‌عنوان ابزاری برای اندازه‌گیری ریسک بازار استفاده شود، لازم است توانمندی آن در اندازه‌گیری ریسک مورد بررسی قرار گیرد. مرحلهٔ سنجش اعتبار مدل‌های ارزش درمعرض‌ریسک یا به‌طور عام مدل‌های ریسک، یکی از مراحل کلیدی در فرآیند مدیریت ریسک است.

در این فصل سه رویکرد پس‌آزمایی را از نظر گذراندیم. هرکدام از این رویکردها نیز به‌نوبه خود شامل مدل‌های متنوعی است. کاربرد این مدل‌ها آسان است و اغلب آن‌ها ابزارهای قدرت‌مندی جهت ارزیابی عملکرد مدل‌های VaR است. برای پس‌آزمایی ریزش موردانتظار نیز مدل‌های مشابهی وجود دارد که در این فصل از بررسی آن‌ها صرف‌نظر کردیم.

با وجود قدرت‌مندبودن روش‌های پس‌آزمایی، نباید تنها بر یک روش اتکا کرد. نتایج حاصل از هر مدل پس‌آزمایی را باید با به‌کارگیری دیگر روش‌ها مورد تأیید قرار داد، چراکه نتایج قابل‌اتکا، مستلزم شواهد کافی است. کاربرد مجموعه‌ای از مدل‌های پس‌آزمایی جهت شناسایی نقاط قوت و ضعف مدل‌های ریسک، روش مفیدی است. در نهایت این‌که هدف از پس‌آزمایی تنها ارزیابی مدل‌های ریسک نیست. فرآیند پس‌آزمایی با کمک به شناسایی نحوهٔ عملکرد مدل‌ها و برجسته‌سازی محدودیت‌های آن‌ها ما را در جهت بهبود مدل‌های VaR توانمند می‌سازد.

منابع

1. Basel II: *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework-Comprehensive Version*, (June 2006).
2. Basel, *Supervisory framework for the use of backtesting in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements*, (January 1996).
3. Benniga, S. (2001), *Financial modeling using Excel and VBA*, MIT press, Second Edition.
4. Berkowitz, J. (2001), "Testing density forecasts, with applications to risk management," *Journal of Business and Economic Statistics*, American Statistical Association, Vol. 19, pp. 465-474.
5. Berkowitz, J., Christoffersen, P. and Pelletier, D. (2005),"Evaluating value-at-risk models with desk-level data", *Fourth Joint Central Bank Research Conference*, 9 Nov 2005, European Central Bank.
6. Bixaulti, J. (2005), *Accurate Measures of Value At Risk Fitting Fat Tails* (Thesis), Department of Management and Finance, University of Murcia (Spain).
7. Blanco, C. and Soronow, D. (1998), "How good is your VaR? using backtesting to access system performance" *Financial Engineering News* (August), pp. 1-2.
8. Christoffersen, P. (1998), "Evaluating interval forecasts," *International Economic Review*, Vol.39, pp. 841-862.
9. Christofferson, P. and Pelletier, D. (2004), " Backtesting value-at-risk: a duration-based approach," *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 2, No. 1, pp. 84-108.

10. Crnkovic, C. and Drachman, J. (1997), *Quality control in VaR: Understanding and applying value-at-risk*, Risk Publications, ISBN 189933226X.

11. Diebold, F. X., Gunther, T. A. and Tay, A. S. (1998), "Evaluating density forecasts," *International Economic Review*, Vol. 39, pp. 863-883.

12. Dowd, K. (2005), *Measuring market risk*, John Wiley & Sons Ltd. Second Edition.

13. Engle, R. F. and Manganelli, S. (2004) "CAViaR: conditional autoregressive value-at-risk by regression quantiles," *Journal of Business and Economic Statistics*," Vol. 22, pp. 367-381.

14. Hartz, C., Mittink, S. and Paollela, S. (2006), "Accurate value at risk forecasting based on the normal-GARCH model," *National center of competence in research financial valuation and risk management*, Working paper No. 333.

15. Hurlin, C. Tokpavi, S. (2006), *Backtesting VaR Accuracy: A new simple test* (Thesis), University of Orleans.

16. Lehikonen, K. (2007), *Development of Systematic Backtesting Processes of Value at Risk* (Thesis), Helsinki University of Technology.

17. Lopez, J. A. (1998), "Regulatory evaluation of value-at-risk models" Federal Reserve Bank of New York, *Economic Policy*, pp. 119-124.

18. Timothoes, A. and Stavros, D. (2005), "Modeling risk for long and short trading positions," *The Journal of Risk Finance*, pp. 226-238.

نمایه

ا

آ

ب

پ

ت

ج

چ

ح

خ

د

ر

ز

س

ش

ض

ط

ع

غ

ف

ق

ک

گ

ل

م

ن

و

ه

ی

فهرست برابری واژگان- فارسی به انگلیسی

الف

ابزار حساس به نرخ بهره	interest-sensitive instrument
ابزار نمونه‌گیری گیبس	Gibbs sampling tool
اپانچنیکوف	Epanechnikov
اثر اهرم	leverage effect
اثرات تعطیلات	holiday effects
اثرات سایه	shadow effects
اثرات شبه	ghost effects
اثرات فصلی	seasonal effects
اجزای اصلی	principal components
اجزای عادی و غیرعادی	ordinary and extraordinary components
احتمال نکول	probability of default (PD)
اختیارمعاملهٔ اختلاف قیمت	diff option
اختیارمعاملهٔ بالای قیمت	in the money option
اختیارمعاملهٔ دامنک	spread option
اختیارمعاملهٔ زیر قیمت	out of money option
اختیارمعاملهٔ سر به سر	at the money option
اخطار تأدیهٔ وثیقه	margin call
ارزش احتمال	likelihood value
ارزش احتمال مشاهده‌شده	observed likelihood value
ارزش درمعرض‌ریسک	value at risk (VaR)
ارزش درمعرض‌ریسک اجزاء	component VaR (CVaR)

ارزش درمعرض‌ریسک اعتباری	credit value at risk (CVaR)
ارزش درمعرض‌ریسک افزایشی	incremental VaR (IVaR)
ارزش درمعرض‌ریسک انفرادی	stand alone VaR
ارزش درمعرض‌ریسک بازار	market value at risk (MVaR)
ارزش درمعرض‌ریسک بدون تنوع‌بخشی	undiversified VaR
ارزش درمعرض‌ریسک بیضوی	elliptical VaR
ارزش درمعرض‌ریسک تی-استودنت	t-student VaR
ارزش درمعرض‌ریسک شرطی	conditional value at risk (CVaR)
ارزش درمعرض‌ریسک عملیاتی	operational value at risk (OVaR)
ارزش درمعرض‌ریسک لاگ‌نرمال	lognormal VaR
ارزش فرین	extreme value
ارزش فرین تک‌متغیره	univariate extreme value theory
ارزش فرین شرطی	conditional extreme value
ارزش‌های درمعرض‌ریسک نهایی	marginal VaRs
اریب (تورش)	bias
استقلال زنجیره‌ای	serial independence
اعتباردهندگان	creditors
اعوجاج	distortion
اقتصادسنجی کاربردی	applied econometrics
انتظار مشروط بر دنباله	tail conditional expectation (TCE)
انتگرال‌گیری عددی	numerical integration
انحراف‌معیار	standard deviation
انحراف‌معیار تاریخی	historical standard deviation
انحراف‌معیار غلتان	rolling standard deviation
انحنا	curvature
اندازه‌گیری ریسک	risk measurement
اوراق بهادار با پشتوانهٔ وام‌های رهنی	mortgage-backed securities (MBS)
اولین پس‌آزمایی لوپز	Lopez I backtest
اولین تابع زیان لوپز	Lopez I loss function
اهداف ریسکِ مبتنی بر ارزش درمعرض‌ریسک	VaR-defined risk targets

آ

آزمون اختلاف شرط‌بندی	martingale difference test
آزمون پورتمانتو	Portmanteau test
آزمون صدک پویا	dynamic quantile test (DQ test)
آزمون فشار	stress testing
آزمون کرامر-ون-میسز	Cramer-Von-Mises test
آزمون کوپیک	Kupiec test
آزمون کولموگروف-اسمرینوف	Kolmogorov-Smirnov test

آزمون‌های برابری توزیع	distribution-equality tests
آزمون‌های مبتنی بر تبدیل برکویتز	tests based on Berkowitz transformation
آزمون‌های مبتنی بر تبدیل روزن‌بلات	tests based on Rosenblatt transformation
آزمون‌های نرمال‌بودن	normality tests
آمار گرایش مرکزی	central tendency statistics
آماره‌های کوییر	Kuiper statistics
آماره‌های نسبت احتمال	likelihood ratio statistics
آمارهٔ ترتیبی	order statistic (OS)
آمارهٔ والد	Wald statistic

ب

بازدهٔ حسابی	arithmetic return
بازدهٔ ساده	simple return
بازدهٔ لگاریتمی	logarithmic return
بازدهٔ مرکب مستمر	continuous compound return
بازدهٔ هندسی	geometric return
بازگشتی	recursive
باقیماندهٔ استانداردشده	standardized residual
بحران‌های بازار	market crises
برآوردکننده‌های انطباق‌پذیر	adaptive estimators
برآوردکننده‌های حداکثر درست‌نمایی	maximum likelihood estimators (MLEs)
برآوردکننده‌های کرنل متغیر	variable kernel estimators
برآوردکنندهٔ ساده	naive estimator
برآوردکنندهٔ کرنل	kernel estimator
برآوردکنندهٔ کرنل نرمال	normal kernel estimator
برآوردکنندهٔ هیل	Hill estimator
بردار دارایی	asset vector
بردار ریسک	risk vector
بردار کلیدی	key vector
برون‌زا	exogenous
بسط سری تیلور	Taylor’s series expansion
بلایای طبیعی	natural catastrophes
بهترین پوشش	best hedge
بی‌تفاوت نسبت به ریسک (ریسک خنثی)	risk- neutral

پ

پارامتر معیار	scale parameter
پارامتر موقعیت	location parameter
پس‌آزمایی ارزش درمعرض‌ریسک	VaR backtesting

پنجرهٔ غلتان	rolling window
پوشش‌دهندگان فعال	dynamic hedgers
پوشش‌های طبیعی	natural hedges

ت

تابع اپانچنیکوف انطباق‌پذیر	adaptive Epanechnikov function
تابع احتمال	likelihood function
تابع توزیع تجمعی	cumulative distribution function (CDF)
تابع چگالی احتمال	probability density function (PDF)
تابع ریسک‌گریزی	risk-aversion function
تابع ریسک‌گریزی نمایی	exponential risk-aversion function
تابع زیان	loss function
تابع زیان دوتایی	binary loss function
تابع شعاعی	radial basis function
تابع طیف ریسک	risk spectrum function
تابع لگاریتم احتمال	log-likelihood function
تابع مشخصات	characteristic function
تابع معرف	indicator function
تابع میانگین فزونی	mean excess function (MEF)
تابع نگاشت	mapping function
تابع نمره	score function
تابع نمرهٔ احتمال درجهٔ دوم	quadratic probability score (QPS) function
تابع وزن‌دهی	weighting function
تاخت نرخ بهره	interest rate swap
تبدیل انتگرال احتمال	probability integral transformation
تبدیل باکس–کاکس	Box-Cox transformation
تبدیل معکوس باکس–کاکس	reverse Box-Cox transformation
تجزیهٔ چولسکی	Choleski decomposition
تجزیهٔ ریسک	risk decomposition
تجمیع	pooling
تحدب	convexity
تحرکات روبه‌بالا	upward movements
تحرکات روبه‌پایین	downward movements
تحرکات فرین	extreme movements
تحرکات قیمت	price movements
تحلیل داده‌ها پیش از برآورد	preestimation data analysis
تحلیل مدرن سرمایه‌گذاری	modern investment analysis
تخطی‌ها	violations
تخمین دست بالا	overestimation

تخمین چگالی ناپارامتریک	nonparametric density estimation
تخمین دست پایین	underestimation
تخمین ناپارامتریک	nonparametric estimation
تقریب سری تیلور	Taylor series approximation
تقریب کورنیش-فیشر	Cornish-Fisher approximation
تلاطم	volatility
تلاطم بلندمدت متغیر با زمان	time varying long run volatility
تلاطم ضمنی	implied volatility
تلاطم مطلوب	upside volatility
تلاطم نامطلوب	downside volatility
توزیع احتمال شرطی	conditional probability distribution
توزیع بتا	beta distribution
توزیع بیضوی	elliptical distribution
توزیع پرتو	Pareto distribution
توزیع تعمیم‌یافتهٔ t	generalized t-distribution
توزیع تعمیم‌یافتهٔ پرتو	generalized Pareto distribution (GPD)
توزیع تعمیم‌یافتهٔ لاندا	generalized lambda distribution
توزیع تعمیم‌یافتهٔ هذلولی	generalized hyperbolic distribution
توزیع چندمتغیرهٔ لاگ‌نرمال	multivariate lognormal distribution
توزیع چندمتغیرهٔ نرمال	multivariate normal distribution
توزیع چوله-t	skew-t distribution
توزیع خطای تعمیم‌یافته	generalized error distribution (GDE)
توزیع زیان	loss distribution
توزیع شرطی	conditional distribution
توزیع غیرشرطی	unconditional distribution
توزیع فرچت	Frechet distribution
توزیع کوچی	Cauchy distribution
توزیع گاما	gamma distribution
توزیع گامبل	Gumbel distribution
توزیع گوسی معکوس نرمال	normal inverse Gaussian distribution
توزیع لوی	Levy distribution
توزیع مادر	parent distribution
توزیع مشترک	joint distribution
توزیع ویبول	Weibull distribution
توزیع هذلولی	hyperbolic distribution
توزیع یکنواخت	uniform distribution
توزیع یکنواخت استاندارد	standard uniform distribution
توزیع‌های چندمتغیرهٔ t	multivariate t-distributions

توزیع‌های چندمتغیرهٔ بیضوی	multivariate elliptical distributions
توزیع‌های خانوادهٔ پیرسون	Pearson family distributions
توزیع‌های خانوادهٔ جانسون	Johnson family distributions
توزیع‌های خانوادهٔ موقعیت–معیار	location-scale family distribution distributions
توزیع‌های مرکب	mixture distributions
ج	
جذر میانگین مجذور خطا	root of mean squares error (RMSE)
جریان نقدی درمعرض‌ریسک	cash flow at risk (CFaR)
جزء پایدار	permanent component
جزء تصادفی	random component
جزء قطعی	deterministic component
جزء ناپایدار	transitory component
جعبه	box
چ	
چارچوب مدل‌های داخلی	internal models framework
چاله‌های بلک–شولز	holes in Black-Scholes
چگالی احتمال مشترک	joint probability density
چولگی	skewness
چولگی‌های تلاطم	volatility skews
ح	
حداقل سرمایهٔ کل الزامی	minimum total capital requirement (MTCR)
سرمایهٔ لازم برای پوشش ریسک اعتبای	credit risk capital requirement (CCR)
سرمایهٔ لازم برای پوشش ریسک بازار	market risk capital requirement (MCR)
سرمایهٔ لازم برای پوشش ریسک عملیاتی	operational risk capital requirement (OCR)
حداقل‌ها	minima
حداکثر درست‌نمایی	maximum likelihood
حداکثر درست‌نمایی گوسی–بیزی	Guasi-Bayesian maximum likelihood
حداکثرها	maxima
حداکثرهای بلوک	block maxima
حدود ریسک	risk limits
خ	
خط مشخصات	characteristic line
خطای ردگیری	tracking error
خودرگرسیونی مرتبهٔ «p»ام	pth-order autoregressive
خودرگرسیونی مرتبهٔ اول	first-order autoregressive
خودرگرسیونی مرتبهٔ دوم	second-order autoregressive
خوشه	cluster

خوشه‌بندی تلاطم	volatility clustering
خوشهٔ تلاطم	volatility cluster
د	
دارای توزیع یکسان و مستقل	identically and independent distributed (IID)
دارایی تعهدشده	underlying asset
بازده‌های تعدیل‌شده با ریسک	risk-adjusted returns
دارایی‌های ریسک موزون	risk-weighted assets
دامنک پیشنهادی خرید و فروش	bid-ask spreads
دامنهٔ جذب	domain of attraction
دامنهٔ میان چارکی	interquartile range
در معرض بودن	exposure
درآمد درمعرض‌ریسک	income at risk (IaR)
درجهٔ چهار	quartic
درون‌زا	endogenous
دلارهای درمعرض‌ریسک	dollars at risk
دنباله‌های سبک	light tails
دنباله‌های سنگین	heavy tails
دنباله‌های ضخیم	fat tails
دنبالهٔ متراکم	thick tail
دومین تابع زیان لوپز	Lopez II loss function
دیرش	duration
دیرش ورق قرضه	bond duration
ر	
رتبه‌بندی	ranking
رجوع‌کننده به میانگین	mean-reverting
رفتار شرط‌بندی	martingale behavior
رفتار عقلایی	rational behavior
رگرسیون حداقل مجذورات معمولی	ordinary least squares regression
روش عددی	numerical method
روش مونت‌کارلو	Monte Carlo method
روش نیوتون–رافسون	Newton-Raphson method
روش‌های تحلیلی	analytical methods
روش‌های دونیم‌سازی	bisection methods
رویدادهای اعتباری	credit events
رویدادهای زیان‌بار	loss events
رویدادهای عملیاتی	operational events
رویدادهای فرین	extreme events

رویکرد انتگرال‌گیری بسته	closed-form integration approach
رویکرد پیش‌بینی احتمال رویداد	event probability forecast approach
رویکرد پیش‌بینی چگالی	density forecasting approach
رویکرد تحلیلی	analytical approach
رویکرد صدک–رگرسیون	quantile-regression approach
رویکرد قبل و بعد	before and after approach
رویکرد نرمال مرکب	normal mixture approach
رویکرد واریانس–کوواریانس چندمتغیرهٔ نرمال	multivariate normal variance-covariance approach
رویکرد هال–وایت جهت انتقال به نرمال‌بودن	Hull-White Transformation-into-normality approach
رویکردهای پارامتریک	parametric approaches
رویکردهای تاریخ محور	historical based approaches
رویکردهای مبتنی بر تلاطم ضمنی	implied volatility based approaches
رویکردهای ناپارامتریک	nonparametric approaches
رویکردهای نیمه‌پارامتریک	semiparametric approaches
ریزش موردانتظار	expected shortfall
ریزش موردانتظار اجزاء	component expected shortfall (CES)
ریزش موردانتظار نهایی	marginal expected shortfall
ریسک اجرا	implementation risk
ریسک ارزش	value risk
ریسک اعتباری	credit risk
ریسک بازار	market risk
ریسک تسویه	settlement risk
ریسک تنوع ناپذیر	nondiversifiable risk
ریسک تنوع‌پذیر	diversifiable risk
ریسک جریان نقدی	cash flow risk
ریسک حاکمیت	sovereign risk
ریسک خارج از ترازنامه	off-balance-sheet risk
ریسک درآمد	earning risk
ریسک‌دوست	risk loving
ریسک سیستماتیک	systematic risk
ریسک غیرسیستماتیک	nonsystematic risk
ریسک غیرقابل‌اجتناب	unavoidable risk
ریسک قابل‌اجتناب	avoidable risk
ریسک کالا	commodity risk

ریسک مدل	model risk
ریسک مطلق	absolute risk
ریسک ناتوانی در پرداخت	insolvency risk
ریسک نامطلوب	downside risk
ریسک نرخ ارز	foreign exchange risk
ریسک نرخ بهره	interest rate risk
ریسک نسبی	relative risk
ریسک نقدشوندگی دارایی‌ها	assets liquidity risk
ریسک نقدینگی	liquidity risk
ریسک نقدینگی بازار-محصول	market-product liquidity risk
ریسک نقدینگی تأمین وجوه	funding liquidity risk
ریسک نکول	default risk
ریسک‌های اجزاء	component risks
ریسک‌های افزایشی	incremental risks
ریسک‌های تجاری	business risks
ریسک‌های ترکیب‌شده	combined risks
ریسک‌های غیرتجاری	nonbusiness risks
ریسک‌های مالی	financial risks

ز

زنجیرۀ مرتبۀ اول مارکوف	first order Markov-chain
زیان دنباله	tail-loss
زیان مشروط بر نکول	loss given default (LGD)
زیان موردانتظار دنباله	expected tail loss
زیرجمع‌پذیری	subadditivity

س

سازگار	consistent
سبد دارایی	portfolio
سرمایۀ درمعرض‌ریسک	capital at risk
سری بازدۀ مالی	financial return series
سطح بحرانی	disaster level (critical level)
سطح پوشش	coverage level
سطح پوشش شرطی	conditional coverage level
سطح پوشش غیرشرطی	unconditional coverage level
سطوح ارزش درمعرض‌ریسک	VaR surfaces
سنجه‌های تلاطم	volatility measures
سنجه‌های حساسیت	sensitivity measures
سنجه‌های ریسک طیفی	spectral risk measures

سنجه‌های ریسک مبتنی بر صدک	quantile-based risk measures
سنجه‌های ریسک نامطلوب	downside risk measures
سنجه‌های ریسک یونانی	Greek risk measures
سنجه‌های منسجم ریسک	coherent risk measures
سنجه‌های منسجم ریسک افزایشی	incremental coherent risk measures
سنجهٔ ریسک	risk measure
سنجهٔ ریسک طیفی–نمایی	spectral-exponential risk measure
سوزن بوفن	Buffon needle

ش

شاخص دنباله	tail index
شبکهٔ عصبی	neural network
شبکهٔ یادگیرنده	learning network
شبیه‌سازی تاریخی بوت‌استرپ	bootstrapped historical simulation
شبیه‌سازی تاریخی فیلترشده	filtered historical simulation (FHS)
شبیه‌سازی تاریخی مقدماتی	basic historical simulation
شبیه‌سازی تاریخی موزون	weighted historical simulation (WHS)
شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با تلاطم	volatility-weighted historical simulation
شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با زمان	age-weighted historical simulation
شبیه‌سازی تاریخی موزون‌شده با همبستگی	correlation-weighted historical simulation
شبیه‌سازی مونت‌کارلو	Monte Carlo Simulation (MCS)
شدت	severity
شرطی‌بودن	conditionality

ص

صدک آلفا	α-quantile

ض

ضریب هموارسازی	smoothing coefficient

ط

طبقه‌های دارایی	asset classes
طرف قرارداد	counterparty

ع

عامل تعدیل	adjustment factor
عدم‌اطمینان	uncertainty
عدم‌تغییر انتقالی	translational invariance
عدم‌نقدینگی بازار	market illiquidity
عرض بند	bandwidth
عرض طبقه	bin width

عوامل ریسک	risk factors
عوامل ریسک چندگانه	multiple risk factors
عوامل کلیدی	key factors
غ	
غیرایستابودن	non-stationarity
غیرخطی‌بودن	non-linearity
ف	
فراتر از آستانه	peak over threshold (POT)
فراوانی	frequency
فرآیند اخلال ناهمبسته	uncorrelated noise process
فرآیند استنباط	inference process
فرآیند انتقال	transformation process
فرآیند حرکت برآونی هندسی	geometric Brownian motion process (GBMP)
فرآیند گشت تصادفی	random walk process
فرآیند نگاشت	mapping process
فرآیندهای تصادفی	stochastic processes
فرآیندهای همبستگی	correlation processes
فروش استقراضی	short sale
فزایندگی ضعیف	weakly increasing
فنون تنوع‌بخشی	diversification techniques
فنون کاهش واریانس	variance reduction techniques
ق	
قاعدهٔ ریشهٔ دوم زمان	the rule of square root of time
قرارداد تاخت	swap contract
قضیه‌های ارزش فرین	extreme value theorems
قضیهٔ اولر	Euler theorem
قضیهٔ حد مرکزی	central limit theorem (CLT)
قضیهٔ فیشر و تیپت	Fisher and Tippet theorem
قواعد انسجام	coherent axioms
ک	
کارایی شرطی	conditional efficiency
کشیدگی	leptokurtosis
کشیدگی اضافی	excess kurtosis
گ	
گشت تصادفی لاگ‌نرمال	lognormal random walk
گشتاورهای تجربی	empirical moments

ل	
لبخندهای تلاطم	volatility smiles
م	
ماتریس ریشهٔ دوم	matrix square root
ماتریسِ گذار	transition matrix
ماتریس گذار احتمال	probability transition matrix
ماتریس معین مثبت	positive-definite matrix
ماتریس نیمه‌معین مثبت	positive semi-definite matrix
متغیر تصادفی دوتایی	binary random variable
متغیر جهش	jump variable
متغیر مبدل	transformed variable
متغیرهای پیرو و پیش‌رو	lags and leads variables
متغیرهای توضیحی	explanatory variables
متوسط قدرمطلق انحرافات	mean absolute deviation
متوسط مجذور انحرافات	mean squared deviation
متوسط واریانس بلندمدت	long-run average variance
مثلث	triangle
مجانباً	asymptotically
مدل میانگین متحرک ساده	simple moving average (SMA) model
مدل باکس–کاکس	Box-Cox model
مدل تک‌شاخصی	single index model
مدل تک‌عاملی	single-factor model
مدل حداقل مجذورات	least squares model
مدل خودرگرسیونی مشروط بر ناهمسانی واریانس	autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH) model
مدل خودرگرسیونی مشروط بر ناهمسانی واریانس تعمیم‌یافته	generalized autoregressive conditional heteroskedasticity (GARCH) model
مدل شاخصی شارپ	the Sharpe index model
مدل قیمت‌گذاری اختیارمعاملهٔ بلک–شولز	Black-Scholes option pricing model
مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای	capital asset pricing model (CAPM)
مدل گشت تصادفی	random walk model
مدل میانگین متحرک با اوزان نمایی	exponentially weighted moving average (EWMA) model

Markowitz mean-variance model	مدل میانگین–واریانس مارکویتز
safety models	مدل‌های ایمنی
regime-switching Markov chain models	مدل‌های تغییر رژیم زنجیرهٔ مارکوف
stochastic volatility models	مدل‌های تلاطم تصادفی
jump-diffusion models	مدل‌های جهش–انتشار
multi-factor models	مدل‌های چندشاخصی
multifactor models	مدل‌های چندعاملی
autoregressive models	مدل‌های خودرگرسیونی
autoregressive moving average (ARMA) models	مدل‌های خودرگرسیونی میانگین متحرک
factor models	مدل‌های عاملی
comparing models	مدل‌های مقایسه‌ای
conditional mean models	مدل‌های میانگین شرطی
moving average models	مدل‌های میانگین متحرک
normal mixture models	مدل‌های نرمال مرکب
conditional variance models	مدل‌های واریانس شرطی
risk management	مدیریت ریسک
enterprise wide risk management (EWRM)	مدیریت ریسک جامع بنگاه اقتصادی
agency problems	مسائل نمایندگی
simulated paths	مسیرهای شبیه‌سازی‌شده
sample paths	مسیرهای نمونه
credit derivatives	مشتقه‌های اعتباری
expected-gain confidence limit criterion	معیار حد اطمینان عایدی موردانتظار
extreme value copulas	مفصل‌های ارزش فرین
regulator	مقام ناظر
portfolio holdings	موجودی‌های سبد دارایی
long position	موقعیت خرید
risk position	موقعیت ریسک
short position	موقعیت فروش
subpositions	موقعیت‌های فرعی
uniform random number generator	مولد یکنواخت اعداد تصادفی
risk components	مؤلفه‌های ریسک
mean excess loss	میانگین زیان اضافی
qth-order moving average	میانگین متحرک مرتبهٔ «q»ام
first-order moving average	میانگین متحرک مرتبهٔ اول
mean integrated square error (MISE)	میانگین مجذور خطای تجمیع‌یافته
	ن
unbiased	نا اریب (بدون تورش)

نارسایی‌های بازار	market imperfections
نامتقارن	asymmetric
نامنفی‌بودن	non-negativity
ناهمسانی واریانس	heteroskedasticity
نرخ فروپاشی نمایی	exponential rate of decay
نرمال‌سازی	normalization
نسبت احتمال پوشش شرطی	conditional coverage likelihood ratio
نسبت تخطی	violation ratio
نسبت شکست	failure ratio
نسبت‌های پوشش یونانی	Greek hedge ratios
نظریهٔ ارزش فرین	extreme value theory (EVT)
نظریهٔ ارزش فرین چندمتغیره	multivariate extreme value theory (MEVT)
نظریهٔ تابع مطلوبیت	utility-function theory
نظریهٔ تخمین چگالی	density estimation theory
نظریهٔ تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین	generalized extreme value theory (GEVT)
نظریهٔ سنجه‌های منسجم ریسک	theory of coherent risk measures
نظریهٔ قیمت‌گذاری آربیتراژ	arbitrage pricing theory (APT)
نظریهٔ مفصل‌ها	copulas theory
نقدینگی درمعرض‌ریسک	liquidity at risk (LaR)
نکول	default
نگاشت سبد دارایی	portfolio mapping
نمودار صدک-صدک	quantile-quantile plot (Q-Q plot)
نمودار هیل	Hill plot
نمونه‌برداری مجدد	resampling
نوسان	fluctuation
نوفهٔ سفید	white noise
نیم‌سنجه‌های ریسک	semi risk measures
نیم‌واریانس بازدهٔ میانگین	mean return semivariance
نیم‌واریانس بازدهٔ هدف	target return semivariance
نیم‌واریانس زیرمیانگین	below-mean semivariance
نیم‌واریانس زیرهدف	below-target semivariance

و

وابستگی متقابل	cross-dependence
وابستگی مسیر	path dependency
واریانس	variance
ویژگی‌های نمونهٔ کوچک	small-sample properties

ه

هزینه‌های معامله	transaction costs
هم‌سانی واریانس	homoskedasticity
هم‌گرایی در برآورد	convergence-in-estimation
همگنی مثبت	positive homogeneity
هموارسازی بیش از حد	over smoothing
هموارسازی نمایی–ریسک‌متریک	exponential smoothing-RiskMetric
هیستوگرام	histogram
ی	
یکنوایی	monotonicity